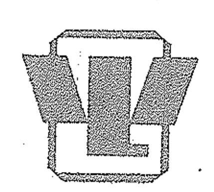
INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

William E. Boyce
y
Richard C. DiPrima
Instituto Politécnico Rensselaer



EDITORIAL LIMUSA
MÉXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

Versión autorizada en español
de la obra publicada en inglés por
John Wiley & Sons, Inc., bajo el título
INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS
© by John Wiley & Sons, Inc., New York

Versión española:

ASDRUBAL FLORES LOPEZ

Físico de la Universidad Nacional
Autónoma de México.
Profesor de Termodinámica y Fisicoquímica
de la Facultad de Ciencias de la Universidad
Veracruzana, Jalapa.

Revisión:

HELGA FETTER DE ABREU

M. en Ciencias, en Matemáticas
y Profesora en Matemáticas en la
Facultad de Ciencias de la Universidad
Nacional Autónoma de México.

Primera edición: 1972
Primera reimpresión: 1974
Segunda reimpresión: 1977
Tercera reimpresión: 1979
Cuarta reimpresión: 1981
Quinta reimpresión: 1984
Sexta reimpresión: 1986
Impreso en México
(5514)

ISBN 968 – 18 – 0636 – 0

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EL DIA
21 DE FEBRERO DE 1986, EN LOS TALLERES DE
IMPRESIONES EDITORIALES, S. A.
LAGO CHALCO 230, COL. ANAHUAC
MEXICO, D. F.

LA EDICION CONSTA DE 2,000 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICION

KE — 518 — 80

A mi madre, Ethel DiPrima
y a la grata memoria
de mi padre, Clyde DiPrima

RICHARD C. DIPRIMA

A mi madre, Marie S. Boyce
y a mi padre, Edward G. Boyce

WILLIAM E. BOYCE

PREAMBULO

Además del presente libro, hemos publicado, en colaboración con la misma casa editorial, otros dos libros que tratan, en forma más amplia, de las ecuaciones diferenciales. Uno de éstos, *Elementary Differential Equations,* contiene un análisis algo más detallado de los temas presentados en esta obra y capítulos adicionales sobre las transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales no lineales y estabilidad. El otro libro *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,** expone todos los temas anteriores y, también, abarca material adicional sobre ecuaciones diferenciales parciales, separación de variables, series de Fourier y problemas con valores en la frontera de Sturm-Liouville.

W. E. B.
R. C. D.

* Versión española, intitulada ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA, Editorial Limusa.

PROLOGO

Este libro se escribió para utilizarlo como texto en un curso introductorio de ecuaciones diferenciales ordinarias. El material es suficiente para impartir un curso de un semestre o, con mayor flexibilidad en la elección de los tópicos, puede servir para un curso trimestral. El libro también puede usarse como texto complementario en el curso de cálculo, en el cual se dedica una parte a las ecuaciones diferenciales. La mayor parte de este libro sólo requiere conocimientos del cálculo de funciones de una variable; sin embargo, en algunas partes del libro se necesita estar familiarizado con la derivación parcial y, por supuesto, en el capítulo que trata de soluciones en serie, se supone que se tiene un conocimiento previo de las series infinitas.

El curso de ecuaciones diferenciales elementales es un excelente medio para que el estudiante aprecie la relación que existe entre las matemáticas puras, por una parte, y las ciencias físicas o la ingeniería, por la otra. Antes de que el ingeniero pueda aplicar confiadamente, en su trabajo, las ecuaciones diferenciales, debe tener, al menos, un conocimiento rudimentario de la teoría básica, incluyendo ciertos conceptos acerca de la existencia y unicidad de las soluciones. Por otra parte, el estudiante de matemáticas puras generalmente se beneficia mucho, si conoce algunas de las formas desarrolladas, cuando la necesidad de resolver problemas específicos requirió realizar trabajo de naturaleza más abstracta.

Escribimos esta obra, teniendo en cuenta el punto de vista usual de quien se dedica a las matemáticas aplicadas y se interesa en las ecuaciones diferenciales, tanto en el aspecto muy teórico como en el sumamente práctico. Hemos, por lo tanto, intentado combinar una exposición precisa (pero no particularmente abstracta) de la teoría elemental de ecuaciones diferenciales, con una introducción a algunos de los métodos de solución que han sido útiles en las aplicaciones. Hemos dado atención principal a aquellos métodos que tienen mayores aplicaciones y que pueden utilizarse en problemas que exceden el alcance de este libro. Insistimos que estos

métodos tienen una estructura ordenada y sistemática, y que no son meramente una colección miscelánea de trucos matemáticos, sin relación alguna. Sin embargo, en algún punto de este libro, el estudiante deberá darse cuenta de que muchos problemas no se pueden resolver satisfactoriamente con las técnicas analíticas más o menos elementales. Por lo tanto, también hemos presentado varias formas de aproximar soluciones numéricamente.

Tan pronto como uno se encuentra con un problema de valores iniciales cuya solución, simplemente, no se puede encontrar, surgen preguntas acerca de la existencia y/o la unicidad de las soluciones. Respondemos estas preguntas, estableciendo los teoremas pertinentes, aunque no se use, necesariamente, su forma más general, y analizamos su significado. En particular, se examinan las diferencias entre las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

Aunque consideramos que, a este nivel, la mayoría de los estudiantes ya empieza a entender la importancia y las aplicaciones de los diferentes teoremas, en muchos casos, las demostraciones requieren conceptos que les son desconocidos, tales como el de convergencia uniforme. Cuando éste es el caso, hemos omitido las pruebas sin dar explicaciones al respecto. Por ejemplo, analizamos algunos de los problemas necesarios para probar los teoremas fundamentales de existencia y unicidad, para un problema de valores iniciales de primer orden, por el método de aproximaciones sucesivas; sin embargo, nuestro enfoque es más bien intuitivo, y se han evitado los detalles analíticos más difíciles.

Con frecuencia los estudiantes tienen la sensación de que los cursos y libros sobre ecuaciones diferenciales tienden a convertirse en "libros de recetas"; hemos hecho un esfuerzo especial para combatir esta tendencia. Cuando se sugiere el método de abordar un tipo nuevo de problema, siempre que sea posible, se trata de aprovechar los conocimientos previos del estudiante. En un libro elemental, no creemos que lo sucinto sea la virtud principal y, en general, hemos puesto más énfasis en la claridad que en lo conciso. Esperamos que lo que se haya perdido en elegancia se haya ganado en facilidad de lectura.

Mientras que el alcance del libro se puede juzgar mejor con el Contenido vale la pena mencionar aquí algunas de sus características principales. El capítulo 1 es una breve introducción a una parte de la terminología usada en las ecuaciones diferenciales. El capítulo 2 trata de las ecuaciones de primer orden. En las primeras tres secciones se destacan las diferencias entre las ecuaciones lineales y no lineales. A esta parte le sigue la presentación de los métodos de integración básicos y usuales, así como un análisis de sus diversas aplicaciones. El capítulo termina con una discusión del teorema de Picard, tanto desde un punto de vista clásico como del moderno.

Los capítulos 3 a 6 están dedicados a las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. En el capítulo 3 tratamos las ecuaciones lineales de segundo orden. Se hace énfasis en los conceptos de conjuntos fundamentales de soluciones, independencia lineal y superposición, así como los métodos de solución. Se toman ejemplos de los campos de vibraciones mecánicas y redes eléctricas. Las ideas de este capítulo se aplican a ecuaciones lineales de orden superior, en el capítulo 5. En el capítulo 4, sobre soluciones en serie de potencias, mostramos por qué la clasificación de punto en puntos ordinarios, regulares singulares, o irregulares singulares es necesaria y natural y no arbitraria. Usamos la ecuación de Euler como un modelo para manejar ecuaciones más generales que tienen un punto regular singular. Los casos, en los que las raíces de la ecuación indicial son iguales, o difieren por un entero, se analizan y se ilustran con formas apropiadas de la ecuación de Bessel. El capítulo 6 trata de sistemas de ecuaciones lineales de primer orden. La primera de las dos secciones ofrece una breve introducción a sistemas y su solución mediante los métodos de eliminación, y se puede estudiar sin tener ningún conocimiento de matrices. A continuación se presenta una sección de repaso sobre vectores y matrices, y, de ahí en adelante, hasta el final del capítulo, se usa la notación de matriz-vector. Esto hace resaltar claramente la estrecha relación que hay entre la teoría de ecuaciones aisladas y la de sistemas de ecuaciones.

En el capítulo 7, se exponen detalladamente las técnicas numéricas discretas para resolver problemas de valores iniciales. Se analizan y comparan procedimientos que van desde el método de la línea tangente de Euler hasta el método de Runge-Kutta. Se pone gran énfasis en sentar los principios fundamentales que rigen a los procedimientos numéricos y sus casos particulares, señalando los tipos y origen de los errores, así como los medios para evitarlos.

Consideramos que, como libro de texto, esta obra tiene una flexibilidad poco común pues, a partir del capítulo 4, los capítulos son básicamente independientes unos de otros. Además, las ideas principales se exponen en las primeras secciones de estos capítulos, mientras que, en las restantes, se tratan los desarrollos y aplicaciones. Por lo tanto, se deja al instructor libertad completa respecto a la selección y organización del material del curso, así como la profundidad con que desea tratar los diferentes tópicos.

Por lo que se refiere a la presentación de este libro, las secciones se marcaron con números decimales aunque en cada capítulo, los teoremas, figuras, etc., están numeradas en orden consecutivo. Por lo tanto, el teorema 3.7 es el séptimo teorema en el capítulo 3, pero no está, necesariamente, en la sección 3.7. La bibliografía se da al final de cada capítulo. A continuación de la mayor parte de las secciones, hay conjun-

tos de problemas para el estudiante y todas las respuestas están reunidas al final del libro. Se señalaron con asterisco algunos de los problemas más difíciles y, en la misma forma, se marcaron ciertas secciones que contienen material más avanzado; el estudiante principiante las puede omitir en su primera lectura.

Deseamos dar las gracias a muchas personas quienes, indirectamente, nos ayudaron a preparar este manuscrito y, en particular, a los Profs. Paul McGloin, David Moskovitz y Lee Segel.

También expresamos nuestro agradecimiento al Profesor George H. Handelman, por sus numerosas y finas atenciones, al poner a nuestra disposición los recursos del Departamento de Matemáticas de Rensselaer. Finalmente, damos las gracias al personal de los departamentos editorial y de producción de John Wiley and Sons, Inc. por su ayuda y cooperación.

Troy, Nueva York

WILLIAM E. BOYCE
RICHARD C. DIPRIMA

CONTENIDO

Capítulo 1

Introducción

Muchos problemas importantes y significativos en ingeniería, en las ciencias físicas y en las ciencias sociales, cuando están formulados en términos matemáticos, requieren la determinación de una función que satisfaga a una ecuación que contiene derivadas de la función desconocida. Tales ecuaciones son llamadas *ecuaciones diferenciales*. Quizá el ejemplo más familiar sea la ecuación de Newton

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right] \tag{1}$$

para la posición $u(t)$ de una partícula sobre la que actúa una fuerza F, la cual puede ser función del tiempo t, la posición $u(t)$, y la velocidad $du(t)/dt$. Para determinar el movimiento de una partícula sobre la que actúa una fuerza dada F es necesario encontrar una función u que satisfaga la Ec. (1). Si la fuerza es debida a la gravedad, entonces

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -mg. \tag{2}$$

Integrando la Ec. (2) tenemos

$$\frac{du(t)}{dt} = -gt + c_1,$$

$$u(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2, \tag{3}$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Para determinar $u(t)$ completamente es necesario especificar dos condiciones adicionales, tales como la posición y la velocidad de la partícula en algún instante de tiempo. Esas condiciones pueden ser usadas para determinar las constantes c_1 y c_2.

Para desarrollar la teoría de las ecuaciones diferenciales de una manera sistemática es útil clasificar los diferentes tipos de ecuaciones. Una de las

clasificaciones más obvias está basada en si la función desconocida depende de una variable independiente o de varias variables independientes. En el primer caso aparecen solamente derivadas ordinarias en la ecuación diferencial y se dice que es una *ecuación diferencial ordinaria*. En el segundo caso, las derivadas son derivadas parciales y la ecuación es llamada una *ecuación diferencial parcial*.

Dos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son, además de la Ec. (1)

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=E(t), \tag{4}$$

para la carga $Q(t)$ de un condensador en un circuito con capacitancia C, resistencia R, inductancia L, y el voltaje $E(t)$; y la ecuación que gobierna el decaimiento en el tiempo de una cantidad $R(t)$ de una substancia radiactiva, como el radio,

$$\frac{dR(t)}{dt}=-kR(t), \tag{5}$$

donde k es una constante conocida. Ejemplos típicos de ecuaciones diferenciales parciales son: la ecuación de Laplace (1749-1827) o ecuación para el potencial

$$\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}=0, \tag{6}$$

la ecuación para la difusión del calor o ecuación térmica

$$\alpha^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{7}$$

y la ecuación de onda

$$a^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Aquí la α^2 y la a^2 son ciertas constantes. La ecuación potencial, la ecuación de difusión y la ecuación de onda aparecen en una variedad de problemas en los campos de la electricidad y el magnetismo, la elasticidad, y la mecánica de fluidos. Cada una es típica de diferentes fenómenos físicos (observe los nombres), y cada una es representante de una gran clase de ecuaciones diferenciales parciales. En este libro solamente nos interesaremos en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

El *orden* de una ecuación diferencial ordinaria es el orden de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación. Por lo tanto, las Ecs. (1) y (4) de la sección anterior, son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, y la Ec. (5) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Más generalmente, la ecuación

$$F[x,u(x),u'(x),\ldots,u^{(n)}(x)]=0 \tag{1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden. La Ec. (1) representa una relación entre la variable independiente x, los valores de la función u y sus primeras n derivadas $u', u'', \ldots, u^{(n)}$. Es conveniente escribir, siguiendo la notación usual en la teoría de las ecuaciones diferenciales, y por $u(x)$, con y', $y'', \ldots, y^{(n)}$ que significan, respectivamente, $u'(x), u''(x), \ldots, u^{(n)}(x)$. Así, la Ec. (1) se escribe como

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0. \tag{2}$$

Ocasionalmente, se usarán otras letras en lugar de y; el significado quedará claro dentro del contexto.

Se supondrá que siempre es posible despejar la derivada de más alto orden en una ecuación diferencial ordinaria dada, obteniendo

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}). \tag{3}$$

Solamente se estudiarán ecuaciones de la forma (3). Esto es principalmente para evitar la ambigüedad que puede surgir debido a que una ecuación simple de la forma (2) puede corresponder a varias ecuaciones de la forma (3). Por ejemplo, la ecuación

$$y'^2+xy'+4y=0$$

conduce a las dos ecuaciones

$$y'=\frac{-x+\sqrt{x^2-16y^2}}{2} \quad \text{o} \quad y'=\frac{-x-\sqrt{x^2-16y^2}}{2}.$$

El hecho de que hayamos escrito la Ec. (3) no significa necesariamente que haya una función $y=\phi(x)$ que la satisfaga. Realmente ésta es una de las cuestiones que deseamos investigar. Por una *solución* de la ecuación diferencial (3) sobre el intervalo $\alpha<x<\beta$ entendemos una función ϕ tal que existan ϕ', $\phi'', \ldots, \phi^{(n)}$ y satisfaga

$$\phi^{(n)}(x)=f[x,\phi(x),\phi'(x),\ldots,\phi^{(n-1)}(x)] \tag{4}$$

para cualquier x en $\alpha<x<\beta$. A menos que se especifique de otro modo, supondremos que la función f de la Ec. (3) es una función de valores reales, y estamos interesados en obtener las soluciones $y=\phi(x)$ de valores reales.

Se puede verificar fácilmente que la ecuación de primer orden

$$\frac{dR}{dt}=-kR \tag{5}$$

tiene la solución

$$R=\phi(t)=ce^{-kt}, \qquad -\infty<t<\infty, \tag{6}$$

donde c es una constante arbitraria. Similarmente, las funciones $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ son soluciones de

$$y'' + y = 0 \tag{7}$$

para toda x.

Una pregunta que puede venir a la mente es si hay otras soluciones de la Ec. (5) además de las dadas por la Ec. (6), y si habrá otras soluciones de la Ec. (7) además de $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$. Otra pregunta que puede ocurrirse aún antes es la siguiente: ¿Dada una ecuación de la forma (3), cómo sabemos si tiene una solución? Esta es la pregunta acerca de la *existencia* de una solución. No todas las ecuaciones diferenciales tienen solución; ni es la pregunta puramente matemática. Si un problema físico que tiene sentido está formulado matemáticamente en forma correcta como una ecuación diferencial, entonces el problema matemático deberá tener una solución. En este sentido un científico o ingeniero tiene una guía para comprobar la validez de su formulación matemática.

En segundo lugar, suponiendo que una ecuación dada tiene una solución, ¿tendrá otras soluciones? En tal caso ¿qué tipo de condiciones adicionales deben ser especificadas para encontrar una solución particular? Esta es la pregunta acerca de la *unicidad*. Nótese que hay una infinidad de soluciones para la ecuación de primer orden (5) correspondientes a una infinidad de modos de escoger la constante c en la Ec. (6). Si R se especifica para algún tiempo t, esa condición determinará un valor para c; aún así, no obstante, no sabemos si hay otras soluciones para la Ec. (5) que también tengan prescrito el valor R al tiempo t predeterminado. Las cuestiones de existencia y unicidad son cuestiones difíciles; éstas y otras cuestiones relacionadas con éstas, se discutirán cuando sigamos adelante.

Una tercera pregunta, más práctica es: ¿Dada una ecuación diferencial de la forma (3), cómo determinamos realmente una solución? Podemos notar que si encontramos una solución de la ecuación dada, tenemos contestada al mismo tiempo la cuestión de la existencia de una solución. En cambio, sin conocer la teoría de la existencia, podemos, por ejemplo, usar una gran máquina computadora para encontrar una aproximación a una "solución" que no existe. Aunque sepamos que una solución existe, puede ser que la solución no sea expresable en términos de las funciones elementales usuales: funciones polinomiales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, e hiperbólicas. Por desgracia ésta es la situación para la mayoría de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, antes de considerar problemas difíciles, primero es necesario dominar algo de la teoría elemental de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ecuaciones Lineales y No Lineales. Una segunda clasificación importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias tiene que ver con que si las ecuaciones son lineales o no lineales. La ecuación diferencial

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

se dice que es *lineal* si F es una función lineal en las variables $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Por lo tanto la ecuación diferencial ordinaria lineal general de orden n es

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x). \tag{8}$$

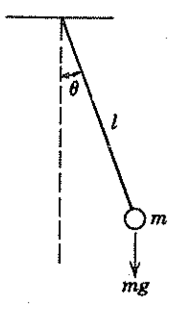


FIGURA 1.1

Las Ecs. (2), (4) y (5) de la sección anterior, son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Una ecuación que no sea de la forma (8) es una ecuación *no lineal*. Por ejemplo, el ángulo θ que forma un péndulo oscilante, de longitud l, respecto a la vertical (ver figura 1.1) satisface la ecuación no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{9}$$

La teoría matemática y las técnicas para resolver ecuaciones lineales están altamente desarrolladas. En contraste, para ecuaciones no lineales la situación no es tan satisfactoria. Las técnicas generales para resolver ecuaciones no lineales son bastante defectuosas, y también la teoría asociada con tales ecuaciones es más difícil que para las ecuaciones lineales. En vista de esto, es muy afortunado que muchos problemas importantes conduzcan a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o que, al menos, en primera aproximación, a ecuaciones lineales. Por ejemplo, para el problema del péndulo, si el ángulo θ es pequeño, entonces $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$ y la Ec. (9) puede reemplazarse por la ecuación lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Por otra parte, hay problemas físicos importantes, tales como el flujo de corriente en un tubo de electrones, en los cuales no es posible aproximar a la ecuación no lineal que gobierna el problema, con una ecuación lineal: la no linearidad es crucial.

En un texto elemental es natural enfatizar la discusión de las ecuaciones lineales. La mayor parte de este libro está dedicada por lo tanto a las ecuaciones lineales y a diferentes métodos para resolverlas. Sin embargo, una gran parte del capítulo 2 trata con ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, y los procedimientos numéricos del capítulo 7 son aplicables a ecuaciones no lineales. A través de todo el texto intentamos mostrar porqué las ecuaciones no lineales son, en general, más difíciles, y porqué muchas de las técnicas que son útiles para resolver ecuaciones lineales no pueden aplicarse para las ecuaciones no lineales.

PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales determine su orden y especifique si la ecuación es lineal o no.

a) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \operatorname{sen} x$ *b*) $(1 + y^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$

c) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 1$ *d*) $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = 0$

e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x$ *f*) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} + (\cos^2 x)y = x^3$

2. Verifique para cada una de las siguientes ecuaciones, que la función o funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial.

a) $y'' - y = 0;\ y_1(x) = e^x, y_2(x) = \cosh x$

b) $y'' + 2y' - 3y = 0;\ \ y_1(x) = e^{-3x},\ y_2(x) = e^x$

c) $y'''' + 4y''' + 3y = x;\ y_1(x) = x/3, y_2(x) = e^{-x} + x/3$

d) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, x > 0;\ y_1(x) = x^{1/2}, y_2(x) = x^{-1}$

e) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, x > 0;\ y_1(x) = x^{-2}, y_2(x) = x^{-2}\ln x$

f) $y'' + y = \sec x, 0 < x < \pi/2;\ y = \phi(x) = (\cos x)\ln\cos x + x \operatorname{sen} x$

g) $y' - 2xy = 1;\ y = \phi(x) = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}$

3. Determine para qué valores de r tienen soluciones de la forma $y = e^{rx}$, cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

a) $y' + 2y = 0$ *b*) $y'' - y = 0$

c) $y'' + y' - 6y = 0$ *d*) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

4. Determine para qué valores de r tienen soluciones de la forma $y = x^r$ cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0,\qquad x > 0$

b) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0,\qquad x > 0$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1 ECUACIONES LINEALES

Este capítulo trata de las ecuaciones diferenciales de primer orden, esto es, ecuaciones de la forma

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

donde f es una función dada de dos variables. Cualquier función $y = \phi(x)$, la cual con su derivada y' satisfacen idénticamente a la Ec. (1), es llamada una solución. Nuestro objeto es determinar cuándo tales funciones existen, y de ser así, cómo encontrarlas. Para obtener alguna familiaridad con las ecuaciones diferenciales y sus soluciones, consideraremos primero la ecuación lineal de primer orden

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{2}$$

donde p y g son funciones continuas dadas sobre algún intervalo $\alpha < x < \beta$. En esta sección trataremos con métodos para resolver la Ec. (2). Los aspectos más teóricos que involucran la existencia y unicidad de las soluciones en general serán discutidos en la sección 2.2.

Principiaremos con la ecuación

$$y' + ay = 0, \tag{3}$$

donde a es una constante real. Esta ecuación puede ser resuelta por inspección. ¿Qué función tiene una derivada que es múltiplo de la función original? Claramente $y = e^{-ax}$ satisface la Ec. (3); es más

$$y = ce^{-ax}, \tag{4}$$

donde c es una constante arbitraria, también lo es. Ya que c es arbitraria, la Ec. (4) representa un número infinito de soluciones de la ecuación diferencial (3). Es natural preguntarnos si la Ec. (3) tiene soluciones diferentes a las dadas

por la Ec. (4). Mostraremos en la sección siguiente que no hay otras soluciones, pero por el momento esta pregunta permanece abierta.

Geométricamente, la Ec. (4) representa una familia de curvas de un parámetro, llamadas *curvas integrales* de la Ec. (3). Para $a = 1$ varios miembros de esta familia están bosquejados en la figura 2.1. Cada curva integral es la representación geométrica de la solución correspondiente de la ecuación diferencial.

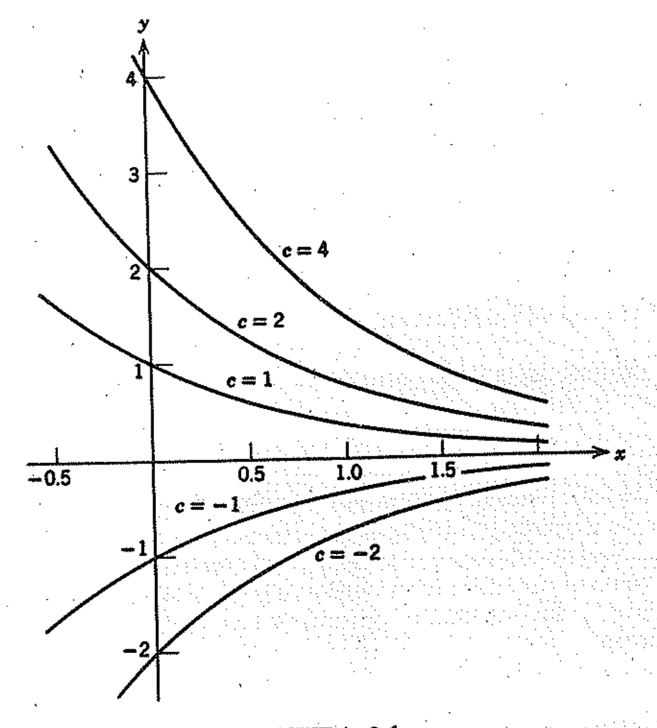


FIGURA 2.1

Especificar una solución particular es equivalente a extraer una curva integral particular de la familia que se ha bosquejado. Usualmente es conveniente hacer esto prescribiendo un punto (x_0, y_0) a través del cual debe pasar la curva integral; esto es, buscar una solución $y = \phi(x)$ tal que

$$\phi(x_0) = y_0.$$

Tal condición es llamada una *condición inicial.* Ya que y es igual a $\phi(x)$ podemos escribir también

$$y = y_0 \quad \text{en} \quad x = x_0.$$

Sin embargo, es una práctica común expresar la condición inicial en la forma

$$y(x_0) = y_0, \tag{5}$$

y ésta es la notación que se seguirá usualmente en este libro. Una ecuación diferencial de primer orden junto con una condición inicial forman un *problema de valores iniciales.**

Por ejemplo, la ecuación diferencial (3),

$$y' + ay = 0,$$

y la condición inicial

$$y(0) = 2, \tag{6}$$

forman un problema de valores iniciales. Como se hizo notar antes, todas las soluciones de la ecuación diferencial (3) están dadas por la Ec. (4). La solución particular que satisface la condición inicial (6) se encuentra substituyendo $x = 0$ y $y = 2$ en la Ec. (4). Entonces $c = 2$ y la solución deseada es la función

$$y = \phi(x) = 2e^{-ax}. \tag{7}$$

Esta es la solución única del problema dado de valores iniciales. Mas generalmente, es posible mostrar que el problema de valores iniciales compuesto de la ecuación diferencial (2) y la condición inicial (5) tiene una solución única siempre que p y g, los coeficientes, sean funciones continuas. Esto se discute en la sección siguiente.

Para desarrollar un método sistemático para resolver ecuaciones lineales de primer orden es conveniente retroceder un poco. Por lo tanto reescribamos la solución (4) de la ecuación diferencial (3) en la forma

$$ye^{ax} = c. \tag{8}$$

Diferenciando el miembro izquierdo de la Ec. (8) tenemos

$$(ye^{ax})' = y'e^{ax} + aye^{ax} = e^{ax}(y' + ay), \tag{9}$$

y de aquí la Ec. (8) implica que

$$e^{ax}(y' + ay) = 0. \tag{10}$$

La cancelación del factor positivo e^{ax} nos conduce a la ecuación diferencial (3). Es importante notar que la solución de la Ec. (3) puede construirse invirtiendo el proceso anterior, esto es, multiplicando la Ec. (3) por e^{ax}, obteniendo entonces la Ec. (10) de la cual se sigue la Ec. (8) usando la Ec. (9). Finalmente, resolviendo la Ec. (8) para y se obtiene la Ec. (4).

El mismo procedimiento puede usarse para resolver la ecuación más general

$$y' + ay = g(x). \tag{11}$$

Multiplicando por e^{ax} nos da

$$e^{ax}(y' + ay) = e^{ax}g(x),$$

o, usando la Ec. (9),

$$(ye^{ax})' = e^{ax}g(x).$$

* Se sugiere esta terminología por el hecho de que la variable independiente denota a menudo al tiempo, la condición inicial define la situación en algún instante fijo, y la solución del problema de valores iniciales describe lo que sucede después.

Por lo tanto

$$ye^{ax} = \int^x e^{at}g(t)\,dt + c,$$

donde c es una constante arbitraria. Por lo tanto una solución de la Ec. (11) es la función

$$y = \phi(x) = e^{-ax}\int^x e^{at}g(t)\,dt + ce^{-ax}. \tag{12}$$

En la Ec. (12) y en todo este libro usaremos la notación $\int^x f(t)\,dt$ para denotar una antiderivada de la función f, esto es, $F(x) = \int^x f(t)\,dt$ designa algún representante particular de la clase de funciones cuyas derivadas son iguales a f. Todos los miembros de esta clase están incluidos en la expresión $F(x) + c$, donde c es arbitraria.

Por lo tanto, para una función dada g, el problema de determinar una solución de la Ec. (11) se reduce a evaluar la antiderivada en la Ec. (12). La dificultad involucrada en esto depende de g; sin embargo la Ec. (12) da una fórmula explícita para la solución $y = \phi(x)$. La constante c puede determinarse si una condición inicial es prescrita.

Tratemos ahora la ecuación lineal general de primer orden (2),

$$y' + p(x)y = g(x).$$

Por analogía con el proceso anterior, deberíamos de escoger una función μ tal que si la Ec. (2) es multiplicada por $\mu(x)$, el miembro izquierdo de la Ec. (2) se transforma en la derivada* $\mu(x)y$. Esto es, queremos elegir μ, si es posible, tal que

$$\begin{aligned}\mu(x)[y' + p(x)y] &= [\mu(x)y]'\\ &= \mu(x)y' + \mu'(x)y.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(x)$ debe satisfacer

$$p(x)y\mu(x) = y\mu'(x).$$

Suponiendo por el momento que $\mu(x) > 0$, y dividiendo entre $y\mu(x)$, obtenemos†

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = [\ln \mu(x)]' = p(x). \tag{13}$$

Por lo tanto

$$\ln \mu(x) = \int^x p(t)\,dt,$$

* Una función μ que tenga esta propiedad se llama un factor integrante. Los factores integrantes se describen más completamente en la sección 2.6.

† Recuérdese que $\int^x \frac{dt}{t} = \ln|x|$.

y finalmente

$$\mu(x) = \exp\left[\int^x p(t)\,dt\right]. \tag{14}$$

Nótese que $\mu(x)$, cuando se define por la Ec. (14), es realmente positiva. Además, ya que la $\int^x p(t)\,dt$ puede denotar cualquiera de las antiderivadas de p, $\mu(x)$ está determinada excepto por una constante multiplicativa arbitraria, la cual no tiene importancia ya que puede ser cancelada en ambos miembros de la ecuación siguiente.

Volviendo a la Ec. (2) y multiplicando por $\mu(x)$ se obtiene

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x).$$

Por lo tanto

$$\mu(x)y = \int^x \mu(s)g(s)\,ds + c,$$

ó

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(s)g(s)\,ds + c\right], \tag{15}$$

donde $\mu(x)$ está dada por la Ec. (14). La Ec. (15) da una fórmula explícita para la solución de la ecuación lineal general de primer orden (2), donde p y g son funciones continuas dadas. Se requieren dos integraciones, una para obtener $\mu(x)$ de la Ec. (14), y la otra para determinar y de la Ec. (15). La constante arbitraria c puede usarse para satisfacer una condición inicial.

Ejemplo 1. Encontrar la solución al problema de valores iniciales

$$y' - 2xy = x, \qquad y(0) = 1. \tag{16}$$

Para esta ecuación la función μ está dada por

$$\mu(x) = \exp\left(-\int^x 2t\,dt\right) = e^{-x^2}.$$

Por lo tanto

$$e^{-x^2}(y' - 2xy) = xe^{-x^2},$$

de manera que

$$(ye^{-x^2})' = xe^{-x^2}.$$

de donde

$$ye^{-x^2} = \int^x te^{-t^2}\,dt + c = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c,$$

y finalmente

$$y = -\tfrac{1}{2} + ce^{x^2}.$$

Para satisfacer la condición inicial $y(0)=1$ debemos elegir $c=3/2$. De aquí que

$$y = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}e^{x^2} \tag{17}$$

es la solución del problema de valores iniciales dado.

Ejemplo 2. Encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$y' - 2xy = 1, \qquad y(0) = 1. \tag{18}$$

Como en el ejemplo anterior $\mu(x)$ es e^{-x^2}, y obtenemos

$$ye^{-x^2} = \int^x e^{-t^2}\,dt + c. \tag{19}$$

Para evaluar c es conveniente tomar el límite de integración inferior* como el punto inicial $x=0$. Entonces, multiplicando la Ec. (19) por e^{x^2} obtenemos

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + ce^{x^2}.$$

La condición inicial $y(0)=1$ requiere que $c=1$ y por lo tanto

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2} \tag{20}$$

es la solución del problema dado.

Nótese que en la solución del ejemplo 2, la integral de e^{-t^2} no se puede expresar como una función elemental. Esto ilustra el hecho de que puede ser necesario dejar la solución, aún de un problema muy simple, en forma integral. Sin embargo, la función

$$\text{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \tag{21}$$

conocida como *función error*, ha sido ampliamente tabulada y puede considerarse como una función conocida. Desde un punto de vista computacional, por lo tanto, la Ec. (20) es una expresión perfectamente satisfactoria como la solución del problema de valores iniciales (18). Es tan satisfactoria, de hecho, como la solución $y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{x^2}$ del problema de valores iniciales (16). Para calcular e^{x^2} para un valor dado de x, ordinariamente consultamos una tabla, y esto no es más difícil que encontrar erf (x) en una tabla diferente.

* La elección del límite inferior de integración es realmente irrelevante, ya que la diferencia entre $\int_a^x e^{-t^2}\,dt$ y $\int_b^x e^{-t^2}\,dt$ es simplemente una constante, que puede sumarse a c.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas, del 1 al 4, resuélvase la ecuación diferencial.

1. $y' + 3y = x + e^{-2x}$
2. $y' - 2y = x^2e^{2x}$
3. $y' + y = xe^{-x} + 1$
4. $y' + (1/x)y = 3\cos 2x, \quad x > 0$

En cada uno de los problemas, del 5 al 8, encuéntrese la solución del problema dado de valores iniciales.

5. $y' - y = 2xe^{2x}, \quad y(0) = 1$
6. $y' + 2y = xe^{-2x}, \quad y(1) = 0$
7. $y' + y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 0$
8. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad x > 0$
9. Encontrar la solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}.$$

Sugerencia: Considérese a x como variable dependiente en lugar de y.

10. *a*) Mostrar que $\phi(x) = e^{2x}$ es una solución de

$$y' - 2y = 0,$$

y que $y = c\phi(x)$ es también una solución de esta ecuación para cualquier valor de la constante c.

b) Mostrar que $\phi(x) = 1/x$ es una solución de

$$y' + y^2 = 0,$$

para $x > 0$, pero que $y = c\phi(x)$ no es una solución de esta ecuación para un valor arbitrario de c. Nótese que la ecuación de la parte *b*) es no lineal mientras que la de la parte *a*) es lineal.

11. Mostrar que si $y = \phi(x)$ es una solución de

$$y' + p(x)y = 0,$$

entonces $y = c\phi(x)$ es también una solución para cualquier valor de la constante c.

12. Si $y = y_1(x)$ es una solución de

$$y' + p(x)y = 0, \tag{i}$$

y $y = \psi(x)$ es una solución de

$$y' + p(x)y = g(x). \tag{ii}$$

Mostrar que $y = cy_1(x) + \psi(x)$ es también una solución de la Ec. (ii) para cualquier valor de la constante c.

*13. Considérese el método siguiente de resolver la ecuación lineal general de primer orden:

$$y' + p(x)y = g(x). \tag{i}$$

a) Si $g(x)$ es idénticamente cero, mostrar que la solución es

$$y = A \exp\left[-\int^x p(t)\,dt\right], \tag{ii}$$

donde A es una constante.

b) Si $g(x)$ no es idénticamente cero, suponer que la solución es de la forma

$$y = A(x) \exp\left[-\int^x p(t)\,dt\right]. \tag{iii}$$

Substituyendo esta expresión para y en la ecuación diferencial dada, mostrar que $A(x)$ debe satisfacer la condición

$$A'(x) = g(x) \exp\left[\int^x p(t)\,dt\right]. \tag{iv}$$

c) Encontrar $A(x)$ a partir de la ecuación (iv). Substituir entonces $A(x)$ en la Ec. (iii) y determinar y; verificar que la solución obtenida de esta forma coincide con la obtenida en la Ec. (15) del texto. Esta técnica se conoce como el método de *variación de parámetros*; se discute en detalle en la sección 3.6.2 en conexión con las ecuaciones lineales de segundo orden.

*14. Use el método del problema 13 para resolver cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y' - 2y = x^2e^{2x}$ *b*) $y' + (1/x)y = 3\cos 2x, \quad x > 0$

2.2 EXPOSICION GENERAL DE ECUACIONES LINEALES

En la sección 2.1 se mostró cómo construir soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Vamos a estudiar ahora ciertas cuestiones más teóricas. Estableceremos primero un Teorema fundamental que establece condiciones bajo las cuales un problema de valores iniciales, para una ecuación lineal de primer orden, tiene siempre una solución y sólo una. El resto de la sección la dedicaremos a la consideración de algunas de las implicaciones de este Teorema.

Teorema 2.1. Si las funciones p y g son continuas dentro de un intervalo abierto $\alpha < x < \beta$ que contiene al punto $x = x_0$, entonces existe una función única $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{1}$$

para $\alpha < x < \beta$, y que también satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

donde y_0 es un valor inicial arbitrariamente prescrito.

La prueba de este Teorema está contenida esencialmente en la discusión que en la última sección nos condujo a la fórmula

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(s)g(s)\,ds + c\right], \tag{3}$$

donde

$$\mu(x) = \exp\int^x p(t)\,dt. \tag{4}$$

Suponiendo que la Ec. (1) tiene una solución, la deducción de la sección 2.1 muestra que debe ser de la forma (3). Nótese que ya que p es continua dentro del intervalo $\alpha < x < \beta$, se sigue que μ está definida en este intervalo, y es una función diferenciable diferente de cero. Esto justifica la conversión de la Ec. (1) a la forma

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x). \tag{5}$$

La función μg tiene una antiderivada ya que μ y g son continuas, y la Ec. (3) se sigue de la Ec. (5). La suposición inicial –de que hay al menos una solución de la Ec. (1)– puede verificarse ahora substituyendo la expresión para y en (3) en la ecuación diferencial. Finalmente, la condición inicial (2) determina la constante c unívocamente, completando por lo tanto la prueba. Ya que la Ec. (3) contiene *todas* las soluciones de la Ec. (1), se acostumbra llamar a la Ec. (3) la *solución general* de la Ec. (1).

Hay varios aspectos sobresalientes del Teorema anterior que deben hacerse notar. En primer lugar, que el problema dado de valores iniciales *tiene* una solución, y también que el problema tiene una solución *única*. En otras palabras, el Teorema asegura tanto la *existencia* como la *unicidad* de la solución de los problemas de valores iniciales (1) y (2). Además, la solución $y = \phi(x)$ es una función derivable y, en efecto, ya que $y' = -p(x)y + g(x)$, la derivada $y' = \phi'(x)$ es continua. Finalmente, la solución satisface la ecuación diferencial (1) en todo el intervalo $\alpha < x < \beta$ en el cual son continuos los coeficientes p y g. Esto significa que la solución no estará definida a lo más en puntos en los cuales ya sea p o g es discontinua. Por lo tanto, se obtiene una cierta cantidad de información cualitativa acerca de la solución simplemente identificando puntos de discontinuidad de p y g.

Como un ejemplo considérese el problema de valores iniciales

$$xy' + 2y = 4x^2, \tag{6}$$

$$y(1) = 2. \tag{7}$$

Procediendo como en la sección 2.1, reescribimos la Ec. (6) como

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x, \tag{8}$$

y buscamos una solución en un intervalo que contenga a $x = 1$. Ya que los coeficientes en la Ec. (8) son continuos excepto en $x = 0$, se sigue del Teorema 2.1 que la solución del problema dado de valores iniciales es válida al menos en el intervalo $0 < x < \infty$. Para encontrar esta solución calculamos primero $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x \frac{2}{t}\,dt\right) = e^{2\ln x}$$
$$= x^2. \tag{9}$$

Multiplicando la Ec. (8) por $\mu(x)$ se obtiene

$$x^2y' + 2xy = 4x^3,$$

ó

$$(x^2y)' = 4x^3.$$

Por lo tanto

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2}, \tag{10}$$

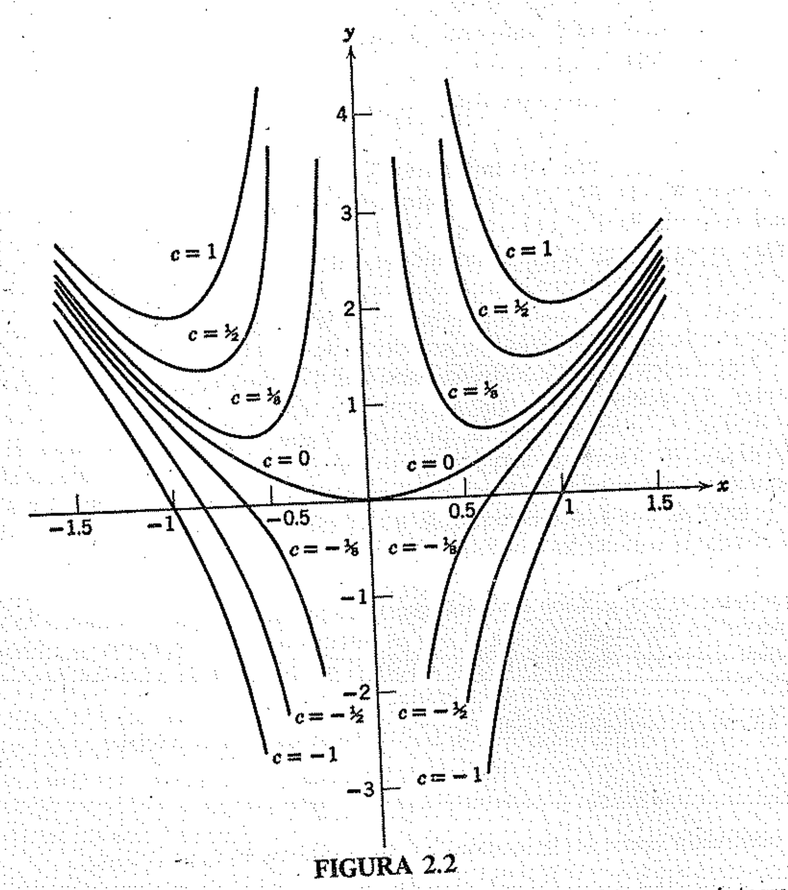


FIGURA 2.2

donde c es arbitrario, es la solución general de la Ec. (6). Las curvas integrales de la Ec. (6) para varios valores de c están bosquejadas en la figura 2.2. Para satisfacer la condición inicial (7) es necesario que $c = 1$; de aquí que

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} \tag{11}$$

es la solución del problema de valores iniciales (6), (7).

Nótese que la solución (11) se hace no acotada cuando $x \to 0$. Esto no es de sorprender ya que $x = 0$ es un punto de discontinuidad del coeficiente de y en la ecuación diferencial (8). Sin embargo, si la condición inicial (7) se cambia a

$$y(1) = 1, \tag{12}$$

se sigue entonces de la Ec. (10) que $c = 0$. Por lo tanto la solución del problema de valores iniciales (6), (12) es

$$y = x^2, \tag{13}$$

lo cual es perfectamente decente cuando $x \to 0$. Esto ilustra que el Teorema 2.1 no asegura que la solución de un problema de valores iniciales deba hacerse singular siempre que las funciones p y g se hagan discontinuas; más bien, establece que la solución no puede hacerse singular en otros puntos.

El comportamiento posible de soluciones de problemas de valores iniciales para ecuaciones lineales de primer orden, en la vecindad de puntos donde p y g son discontinuos, es más variada que lo que sugiere la discusión previa. Se exploran las posibilidades con alguna extensión en los problemas 9 a 12; y aparece en el capítulo 4 un tratamiento más detallado de este problema en conexión con las ecuaciones lineales de segundo orden.

Algunas veces, ecuaciones que no son lineales pueden resolverse haciendo primero una substitución que convierta a la ecuación dada en una lineal. Un tipo de ecuación para la cual esto es posible es la conocida con el nombre de ecuación de Bernoulli; ver problemas 15 y 16.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 4, encuéntrese la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y' + (1/x)y = \operatorname{sen} x, \quad x > 0$
2. $x^2y' + 3xy = (\operatorname{sen} x)/x, \quad x < 0$
3. $y' + (\tan x)y = x \operatorname{sen} 2x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
4. $xy' + 2y = e^x, \quad x > 0$

En cada uno de los problemas del 5 al 8, encontrar la solución del problema de valores iniciales dado. Indicar el intervalo en el cual la solución es válida.

5. $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = 1/2$
6. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 1$
7. $y' + (\cot x)y = 2 \csc x, \quad y(\pi/2) = 1$
8. $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 1/\pi$

Cada una de las ecuaciones de los problemas del 9 al 12, tiene al menos un coeficiente discontinuo en $x = 0$. Resolver cada ecuación para $x > 0$ y describir el comportamiento de la solución cuando $x \to 0$ para varios valores de

la constante de integración. Bosquejar algunos miembros de la familia de curvas integrales.

9. $y' + (2/x)y = 1/x^2$ 10. $y' - (1/x)y = x$

11. $y' - (1/x)y = x^{1/2}$ 12. $y' + (1/x)y = (\cos x)/x$

13. Resolver el problema de valores iniciales

$$y' + 2y = g(x), \qquad y(0) = 0$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Sugerencia: Resolver la ecuación diferencial separadamente para $0 < x < 1$ y para $x > 1$. Entonces igualar las soluciones a fin de que y sea continua en $x = 1$. Nótese que es imposible hacer ambas, y y y' continuas en $x = 1$.

14. Considérese la ecuación

$$y' + ay = be^{-\lambda x}$$

donde a y λ son constantes positivas, y b es cualquier número real. Determine el comportamiento de y cuando $x \to \infty$.

*15. Considérese la ecuación

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

donde n es una constante pero no necesariamente entera y p y q son funciones dadas; esta ecuación es conocida como la ecuación de Bernoulli, en honor a Jacobo Bernoulli* (1654-1705).

a) Resolver la ecuación de Bernoulli cuando $n = 0, 1$.

b) Mostrar que, si $n \neq 0, 1$, la substitución $v = y^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal. Este método de solución fue encontrado por Leibniz (1646-1716) en 1696.

*16. Encontrar la solución general de

$$x^2y' + 2xy - y^3 = 0.$$

Sugerencia: Ver el problema 15.

2.3 ECUACIONES NO LINEALES

Nos dirigiremos ahora a estudiar ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

sujetas a la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

*Jakob Bernoulli (1654-1705) su hermano Johann (1667-1748) y el hijo de Johann, Daniel (1700-1782) fueron solamente tres de los miembros de esta familia de prominentes matemáticos y científicos. Parece que Jakob Bernoulli fue el primero en usar la palabra integral.

La ecuación diferencial (1) y la condición inicial (2) juntas constituyen un problema de valores iniciales. Las cuestiones básicas a considerarse son: si existe una solución para este problema de valores iniciales, si tal solución es única, sobre qué intervalo la solución está definida, y cómo construir una fórmula útil para la solución. Todas estas preguntas fueron contestadas con relativa facilidad en las secciones 2.1 y 2.2 para el caso en el cual la Ec. (1) es lineal. Pero si f no es una función lineal de la variable dependiente y, entonces el tratamiento anterior ya no se aplica. En esta sección discutiremos de una manera general algunos lineamientos para los problemas de valores iniciales no lineales. En particular, notaremos diversas diferencias importantes entre el problema no lineal (1), (2) y el problema lineal consistente de la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{3}$$

y la condición inicial (2).

La razón por la que las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son relativamente simples, es que hay una fórmula que da las soluciones de tales ecuaciones en todos los casos. En contraste, no hay un método general correspondiente para resolver ecuaciones de primer orden no lineales. De hecho, la determinación analítica de la solución $y = \phi(x)$ de una ecuación no lineal es generalmente muy difícil, y a menudo es imposible.

La falta de una fórmula general para la solución de ecuaciones no lineales tiene al menos dos consecuencias importantes. En primer lugar, los métodos que dan soluciones aproximadas, quizá numéricas, tienen mucha mayor importancia para las ecuaciones no lineales que para las lineales. El capítulo 7 contiene una introducción a los métodos numéricos. En segundo término, los problemas que tratan con la existencia y unicidad de las soluciones deberán tratarse con métodos indirectos, toda vez que la construcción directa de la solución, en general no puede hacerse.

Existencia y Unicidad. El Teorema fundamental de existencia y unicidad, es análogo al Teorema 2.1 para ecuaciones lineales. Sin embargo, su demostración es bastante más difícil, y se pospone por lo tanto hasta la sección 2.11.

Teorema 2.2. Sean las funciones f y $\partial f/\partial y$ continuas en algún rectángulo $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ que contenga al punto (x_0, y_0). Entonces, en algún intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ contenido en $\alpha < x < \beta$, hay una solución única $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial (1)

$$y' = f(x, y)$$

que también satisface la condición inicial (2)

$$y(x_0) = y_0.$$

Las condiciones establecidas en el Teorema 2.2 son suficientes para garantizar la existencia y la unicidad del problema de valores iniciales (1), (2). No obstante, aún si f no satisface las hipótesis del Teorema, es aún posible que pueda existir una solución única. Realmente, la conclusión del Teorema sigue siendo válida si se reemplaza la hipótesis acerca de la continuidad de

$\partial f/\partial y$ por ciertas condiciones más débiles. Además, la existencia de una solución (pero no su unicidad), puede establecerse sobre las bases de solamente la continuidad de f sin ninguna hipótesis adicional. La forma presente del Teorema, sin embargo, es satisfactoria para muchos propósitos.

Puede mostrarse por medio de ejemplos, que algunas condiciones impuestas sobre f son esenciales para obtener el resultado establecido por el Teorema. Por ejemplo, el ejemplo siguiente muestra que el problema de valores iniciales (1), (2), puede tener más de una solución si se violan las hipótesis del Teorema 2.2.

Ejemplo 1. Encontrar la solución de

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0 \tag{4}$$

para $x \geq 0$.

Este problema se resuelve fácilmente por el método de la sección 2.4, y puede verificarse que la función

$$y = \phi(x) = (\tfrac{2}{3}x)^{3/2}, \qquad x \geq 0$$

satisface las condiciones de la expresión (4). Por otra parte, la función

$$y = \psi(x) = 0$$

es también una solución del problema de valores iniciales dado. Por lo tanto este problema no tiene una solución única. Este hecho no contradice al Teorema de existencia y unicidad ya que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^{1/3}) = \tfrac{1}{3}y^{-2/3},$$

y esta función no es continua, ni siquiera está definida, en cualquier punto donde $y = 0$. Entonces, el Teorema no se aplica a ninguna región que contiene cualquier parte del eje x. Si (x_0, y_0) es cualquier punto que no está sobre el eje x, entonces hay una solución única de la Ec. (4) que pasa a través de (x_0, y_0).

Intervalo de Definición. Para el problema lineal (2), (3), la solución existe a todo lo largo de cualquier intervalo alrededor de $x = x_0$ en el cual sean continuas las funciones p y g. Por otra parte, para el problema de valores iniciales no lineal (1), (2), el intervalo en el que la solución existe puede ser difícil de determinar. La solución $y = \phi(x)$ existe en tanto que el punto $[x, \phi(x)]$ permanezca dentro de la región en la que se satisface las hipótesis del Teorema; sin embargo, ya que generalmente no se conoce $\phi(x)$, puede ser imposible localizar el punto $[x, \phi(x)]$ con respecto a esa región. En cualquier caso, el intervalo en el cual existe una solución puede no estar relacionado simplemente a la función f en la Ec. (1). Esto se ilustra con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2. Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1. \tag{5}$$

Puede verificarse rápidamente por substitución directa que

$$y = \frac{1}{1 - x} \tag{6}$$

es la solución de este problema de valores iniciales. Claramente, la solución se hace no acotada cuando $x \to 1$, y por lo tanto es válida solamente para $-\infty < x < 1$. No obstante, no hay indicación de la ecuación diferencial en sí misma, de que el punto $x = 1$ sea de alguna manera importante. Más aún, si se reemplaza la condición inicial por

$$y(0) = 2, \tag{7}$$

se puede verificar fácilmente otra vez, que la solución de la ecuación diferencial (5), que satisface la condición inicial (7) es

$$y = \frac{2}{1 - 2x}, \tag{8}$$

y que ahora la solución es no acotada cuando $x \to \frac{1}{2}$. Esto ilustra otra característica perturbadora de los problemas de valores iniciales para ecuaciones no lineales, a saber, que las singularidades de la solución pueden desplazarse dependiendo de la condición inicial que se emplee.

Solución General. Otra forma en la que las ecuaciones lineales y no lineales difieren es en conexión con el concepto de una solución general. Para una ecuación lineal de primer orden, es posible obtener una solución que contenga una constante arbitraria, de la cual todas las soluciones posibles pueden obtenerse, especificando valores para esa constante. Este no necesariamente es el caso para las ecuaciones no lineales; aun cuando se pueda encontrar una solución que contenga una constante arbitraria, puede haber otras soluciones que no puedan ser obtenidas dando valores a esta constante. En el problema 6 se da un ejemplo específico de esta situación. Por lo tanto, usaremos el término "solución general" sólo cuando discutamos ecuaciones lineales.

Soluciones Implícitas. Mencionaremos de nuevo que para una ecuación lineal de primer orden hay una fórmula explícita [Ec. (15) de la sección 2.1] para la solución $y = \phi(x)$. En tanto que las antiderivadas necesarias pueden determinarse, el valor de la solución en un punto puede encontrarse simplemente substituyendo el valor apropiado de x en la fórmula. Para una ecuación no lineal es bastante raro encontrar una solución explícita. A menudo lo mejor que uno puede hacer es eliminar la derivada que aparece en la Ec. (1) con lo cual se obtiene, en lugar de la ecuación diferencial, una ecuación sin derivadas de la forma

$$\psi[x, \phi(x)] = 0 \tag{9}$$

que se satisface con alguna, quizá con todas, las soluciones $y = \phi(x)$ de la Ec. (1). Incluso esto no puede ser llevado a cabo en muchas ocasiones con las ecuaciones no lineales. Sin embargo, si se puede encontrar una relación como la Ec. (9), se acostumbra decir que tenemos una *fórmula implícita* para las soluciones de la Ec. (1). Una ecuación de la forma (9) se llama también una *integral* (o primera integral) de la Ec. (1).

Por ejemplo, considérese la ecuación no lineal simple

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{10}$$

Usando los métodos de la sección siguiente no es difícil mostrar que todas las soluciones de la Ec. (10) satisfacen también la ecuación algebraica

$$x^2 + y^2 = c^2, \tag{11}$$

donde c es una constante arbitraria. Para verificar esta afirmación podemos derivar la Ec. (11) con respecto a x, obteniendo entonces $2x + 2yy' = 0$ ó $y' = -x/y$, que es la Ec. (10). La Ec. (11) por lo tanto, es una fórmula implícita para las soluciones de la Ec. (10). Suponiendo que $c > 0$, hay muchas funciones $y = \phi(x)$ que satisfacen la Ec. (11) para $-c < x < c$. Algunas de éstas son

$$y = \phi_1(x) = \sqrt{c^2 - x^2}, \qquad -c \leq x \leq c \tag{12}$$

$$y = \phi_2(x) = -\sqrt{c^2 - x^2}, \qquad -c \leq x \leq c \tag{13}$$

$$y = \phi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{c^2 - x^2}, & -c \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{c^2 - x^2}, & 0 < x \leq c \end{cases} \tag{14}$$

$$y = \phi_4(x) = \begin{cases} -\sqrt{c^2 - x^2}, & -c \leq x \leq -c/2 \\ \sqrt{c^2 - x^2}, & -c/2 < x < c/2 \\ -\sqrt{c^2 - x^2}, & c/2 \leq x \leq c. \end{cases} \tag{15}$$

Ver la figura 2.3 para las gráficas de las funciones dadas por las Ecs. de la (12) a la (15). Sin embargo, sólo dos de estas funciones satisfacen la ecuación diferencial (10) sobre el intervalo completo $-c < x < c$, éstas son las dadas por las Ecs. (12) y (13). Si también está dada una condición inicial, debemos entonces seleccionar entre las funciones ϕ_1 y ϕ_2 la que satisface la condición especificada y también seleccionar el valor apropiado de c. Por ejemplo, si la condición inicial es

$$y(0) = 3, \tag{16}$$

debemos descartar ϕ_2, y conservar ϕ_1, eligiendo c de tal forma que valga 3. De aquí que

$$y = \sqrt{9 - x^2}, \qquad -3 < x < 3 \tag{17}$$

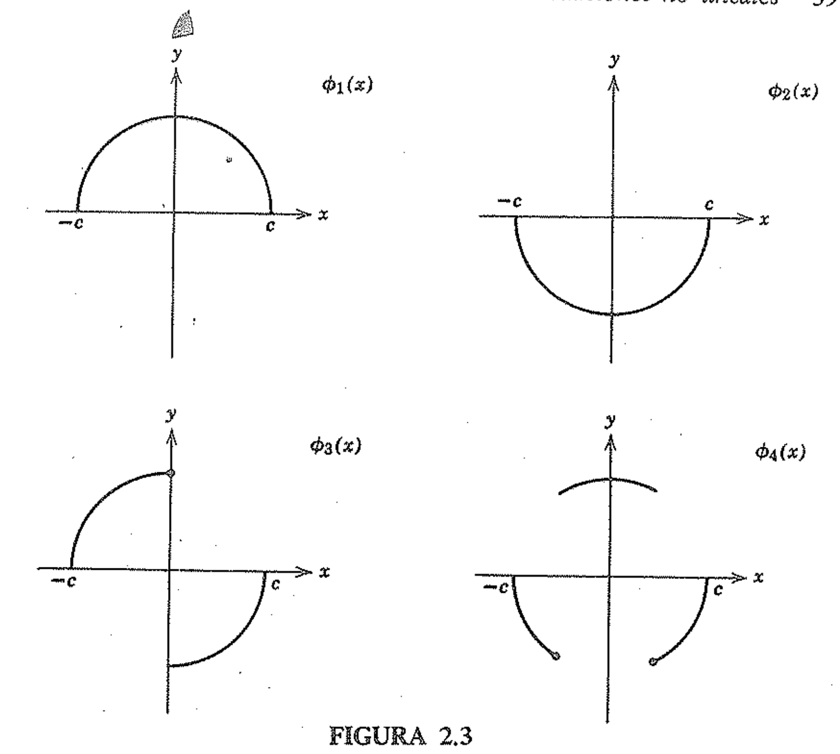


FIGURA 2.3

es una solución del problema de valores iniciales (10) y (16). De acuerdo con el Teorema 2.2, no hay otra solución de este problema en el intervalo $-3 < x < 3$.

En el ejemplo anterior se obtuvieron fácilmente las soluciones explícitas dadas por las Ecs. (12) y (13) porque la relación implícita (11) fue cuadrática en y. Sin embargo, aun con muy poca imaginación se puede ver que una relación implícita (9), suponiendo que pueda encontrarse, será generalmente mucho más complicada que la Ec. (11). Si tal cosa sucede, probablemente sería imposible resolverla (analíticamente) para y; puede significar una dificultad insuperable aún la determinación de los intervalos en los que existe la solución. Además, debe considerarse que puede haber soluciones de la relación implícita (9) que nó satisfagan la ecuación diferencial; también, en algunos casos, la ecuación diferencial puede tener otras soluciones que no satisfagan la relación implícita.

Construcción Gráfica de Curvas Integrales. Ya que no hay forma, en general, de obtener soluciones analíticas exactas de las ecuaciones diferenciales no lineales, los métodos que conducen a soluciones aproximadas o a otra información cualitativa acerca de las soluciones, pueden ser de gran importancia. Uno de tales métodos involucra la aproximación gráfica de curvas integrales. En cada punto en el plano xy donde está definida $f(x, y)$ la ecuación diferencial (1)

$$y' = f(x, y)$$

da un valor para y', que puede pensarse como la pendiente de un segmento de recta a través de ese punto. La totalidad de tales segmentos de recta forman el *campo de direcciones* para la ecuación diferencial dada. Las curvas integrales son curvas que, en cada punto, son tangentes al elemento del campo de direcciones asociado con ese punto.

La forma general de las curvas integrales puede algunas veces visualizarse dibujando los elementos del campo de direcciones en un número suficientemente grande de puntos. Por ejemplo, considérese

$$y' = 4y(1 - y), \tag{18}$$

que es un tipo simple pero importante de ecuación no lineal. La construcción del campo de direcciones se simplifica mucho si hacemos notar que el miembro derecho de la Ec. (18) es independiente de x. Por lo tanto, los elementos del campo de direcciones en todos los puntos sobre cualquier línea paralela al eje x, son también paralelos entre ellos. Además, se pueden encontrar dos soluciones especiales de la Ec. (18) por inspección, éstas son las soluciones constantes $y = \phi_1(x) = 0$ y $y = \phi_2(x) = 1$. Estas soluciones especiales separan el plano xy en tres zonas, en cada una de las cuales y' es de un signo. En efecto,

$$\begin{aligned} &\text{para} \quad y < 0, \quad y' < 0; \\ &\text{para} \quad 0 < y < 1, \quad y' > 0; \\ &\text{para} \quad y > 1, \quad y' < 0. \end{aligned}$$

Usando esta información es relativamente simple construir la figura 2.4, que representa el campo de direcciones para la Ec. (18).

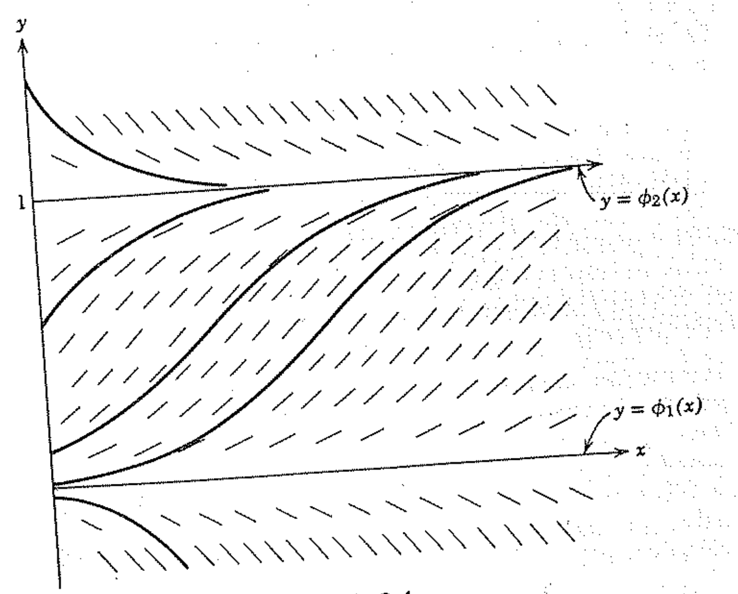


FIGURA 2.4

De este bosquejo se pueden deducir ciertas propiedades cualitativas de las soluciones. En primer lugar, considérese la solución correspondiente a la solución inicial $y(x_0) = y_0$ con $0 < y_0 < 1$. Tal solución tiende a crecer ya que $y' > 0$ en la vecindad del punto inicial. Sin embargo, esta solución no puede crecer más allá de $y = 1$ porque, si alcanza $y = 1$, su pendiente debería volverse (y permanecer) cero. De hecho, la solución dada no puede alcanzar $y = 1$ para ningún valor finito de x; si lo hiciera, entonces de ese punto como punto inicial emanaran dos soluciones, [la solución en cuestión y la solución $y = \phi_2(x)$] en contradicción al Teorema 2.2. Por lo tanto, una solución que principia en el intervalo $0 < y < 1$ se acerca a $y = 1$ cuando $y \to x$. Similarmente, una solución que principie por arriba de $y = 1$ debe decrecer y tender a $y = 1$ desde arriba cuando $x \to \infty$. Finalmente, una solución que originalmente es negativa tiende a decrecer más.

Sucede que la Ec. (18) puede resolverse por el método de la sección 2.4 y se han graficado unas cuantas soluciones en la figura 2.4. Sin embargo, debe enfatizarse que el comportamiento cualitativo de las soluciones de la Ec. (18) se determinó sin resolver la ecuación.

PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, establézcase la región del plano xy donde se puede garantizar la existencia de una solución única, a través de cualquier punto especificado. Esta garantía debe estar determinada por el Teorema de existencia y unicidad.

a) $y' = \dfrac{x - y}{2x + 5y}$ *b*) $y' = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$

c) $y' = \dfrac{2xy}{1 + y^2}$ *d*) $y' = 3(x + y)^{-2}$

e) $y' = \dfrac{\ln |xy|}{1 - x^2 + y^2}$ *f*) $y' = (x^2 + y^2)^{3/2}$

2. Mostrar que $y = \phi(x) = (1 - x^2)^{-1}$ es una solución del problema de valores iniciales

$$y' = 2xy^2, \qquad y(0) = 1.$$

¿En cuál intervalo es válida esta solución?

3. Mostrar que $y = \phi(x) = [2(x + c)]^{-1/2}$, donde c es una constante arbitraria, satisface la ecuación diferencial

$$y' + y^3 = 0.$$

Encuéntrese la solución que satisface la condición inicial $y(1) = 2$. ¿Dónde es válida esta solución?

4. Verificar que

$$y = \phi(x) = [1 + \tfrac{2}{3} \ln (1 + x^3)]^{1/2}$$

es una solución del problema de valores iniciales

$$y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}, \qquad y(0) = 1.$$

¿Para qué intervalo es válida esta solución?

5. Verificar que

$$y = (c^2 - 4x^2)^{1/2}, \qquad y = -(c^2 - 4x^2)^{1/2}$$

son soluciones de la ecuación diferencial

$$y' = -4x/y.$$

¿Para qué partes del plano xy son válidas estas soluciones? Encuentre la solución particular que pasa por el punto (0, 4); a través del punto (1, −1).

6. *a*) Verificar que tanto $y_1(x) = 1 - x$ como $y_2(x) = -x^2/4$ son soluciones del problema de valores iniciales

$$y' = \frac{-x + (x^2 + 4y)^{1/2}}{2}, \qquad y(2) = -1.$$

¿Dónde son válidas estas soluciones?

b) Explicar porqué la existencia de dos soluciones del problema dado no contradice la unicidad del Teorema 2.2.

c) Mostrar que $y = cx + c^2$, donde c es una constante arbitraria, satisface la ecuación diferencial de la parte *a*). Si $c = -1$ se satisface también la condición inicial y se obtiene la solución $y = y_1(x)$. Mostrar que no se puede elegir ninguna c tal que de la segunda solución $y = y_2(x)$.

7. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, construir el campo de direcciones suficientemente bien como para que se pueda visualizar el comportamiento general de la familia de curvas integrales

a) $y' = x^2 + y^2$ 　　 *b*) $y' = x^2 - xy + y^2 - 1$

c) $y' = \dfrac{xy}{1 + x^2}$ 　　 *d*) $y' = \dfrac{2x - 3y}{x + y}$

En cada uno de los problemas del 8 al 11:

a) Bosqueja el campo de direcciones.

b) Bosqueja varios miembros de la familia de curvas integrales sin resolver la ecuación diferencial.

c) Resuelve el problema de valores iniciales dado.

d) Bosqueja la solución obtenida en *c*) y compárala con la obtenida en *b*).

8. $y' = -1, \quad y(1) = 2$ 　　 9. $y' = x + 1, \quad y(0) = 1$

10. $y' + xy = 1, \quad y(1) = 0$ 　　 11. $y' - y = 1 - e^x, \quad y(0) = 0$

12. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, determina la trayectoria general de las curvas integrales tomando en consideración el campo de direcciones. Dada $y = \phi(x; y_0)$ la solución correspondiente a la condición inicial $y(0) = y_0$. ¿Para qué valores de y_0 existe el $\lim_{x\to\infty} \phi(x; y_0)$? Calcular el límite en los casos en que exista.

a) $y' = (1 - y)(2 - y)$

b) $y' = y(1 - y^2)$

c) $y' = -y(1 + y^2)$

d) $y' = \epsilon y - \sigma y^2; \qquad \sigma > 0 \text{ y } \epsilon > 0$

2.4 ECUACIONES SEPARABLES

Es a menudo conveniente escribir la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

en la forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

Es siempre posible hacer esto poniendo $M(x, y)$ igual a $-f(x, y)$ y $N(x, y)$ igual a 1, sin embargo no es ésta la única forma de hacerlo. En el caso de que M sea una función sólo de x y N una función sólo de y, la Ec. (2) toma la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}$$

puede escribirse como

$$-x^2 + (1 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Una ecuación diferencial que puede ponerse en la forma (3) se dice que es *separable*; la razón para este nombre es clara, si la Ec. (3) se escribe en la forma diferencial

$$M(x)\,dx = -N(y)\,dy. \tag{4}$$

Supóngase ahora que H_1 y H_2 son funciones cualesquiera tales que

$$H_1'(x) = M(x), \qquad H_2'(y) = N(y); \tag{5}$$

la Ec. (3) se transforma entonces en

$$H_1'(x) + H_2'(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{6}$$

Si $y = \phi(x)$ es una función derivable de x, entonces, de acuerdo con la regla de la cadena

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}H_2[\phi(x)]. \tag{7}$$

Consecuentemente, si $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial (3), entonces la Ec. (6) se transforma en

$$H_1'(x) + \frac{d}{dx}H_2[\phi(x)] = 0,$$

ó

$$\frac{d}{dx}\{H_1(x) + H_2[\phi(x)]\} = 0. \tag{8}$$

Integrando la Ec. (8) se obtiene

$$H_1(x) + H_2[\phi(x)] = c, \tag{9}$$

ó

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \tag{10}$$

donde c es una constante arbitraria. Se ve que la solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial (3) se ha obtenido en forma implícita. Las funciones H_1 y H_2 son cualesquiera funciones que satisfagan la Ec. (5), esto es, cualesquiera antiderivadas de M y N respectivamente. En la práctica, la solución (10) se obtiene generalmente de la Ec. (4), integrando el miembro izquierdo con respecto a x y el derecho con respecto a y; la justificación de este argumento es la que se acaba de dar.

Si, además de la ecuación diferencial, se tiene una condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{11}$$

la solución particular de la Ec. (3) que satisface esta condición, se obtiene poniendo $x = x_0$, y $y = y_0$ en la Ec. (10). Esto da

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0). \tag{12}$$

Substituyendo este valor para c en la Ec. (10), y notando que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} M(t)\,dt, \qquad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^{y} N(t)\,dt,$$

obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(t)\,dt = 0. \tag{13}$$

La ecuación (13) es una representación implícita de la solución de la ecuación diferencial (3) que también satisface la condición inicial (11). El lector deberá conservar en mente, que la determinación de la solución en forma explícita, o aun la determinación del intervalo preciso en el que existe la solución, generalmente requiere que la Ec. (13) se resuelva para y como una función de x. Esto puede tener dificultades formidables.

Ejemplo. Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad y(0) = -1. \tag{14}$$

La ecuación diferencial puede escribirse como

$$2(y-1)\,dy = (3x^2 + 4x + 2)\,dx.$$

Integrando el miembro izquierdo con respecto a y y el miembro derecho con respecto a x, obtenemos

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c, \tag{15}$$

donde c es una constante arbitraria. Para determinar la solución particular que satisfaga la condición prescrita inicial substituimos $x = 0$ y $y = -1$ en la Ec. (15), obteniendo $c = 3$. De aquí que la solución particular deseada está dada implícitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \tag{16}$$

Para obtener la solución explícita, debemos resolver la Ec. (16) para y en términos de x. Esta es una cosa simple en este caso, ya que la Ec. (16) es cuadrática en y y obtenemos

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \tag{17}$$

Por lo tanto la Ec. (17) nos da dos soluciones para la ecuación diferencial, sin embargo, solamente una de ellas satisface la condición inicial dada. Esta es la solución correspondiente al signo menos en la Ec. (17), así que finalmente obtenemos

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \tag{18}$$

como la solución del problema de valores iniciales (14). Nótese que si el signo más es escogido por equivocación en la Ec. (17), entonces obtendríamos la solución de la misma ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(0) = 3$. Finalmente, con el objeto de determinar el intervalo para el cual la solución (18) es válida, debemos encontrar el intervalo para el cual la cantidad que se encuentra bajo el radical es no negativa. Graficando esta expresión como una función de x, el lector puede mostrar que el intervalo deseado es $x > -2$.

En este ejemplo no hubo dificultad para resolverlo explícitamente para y como una función de x y determinar el intervalo exacto para el cual la solución existe. Sin embargo, esta situación es excepcional y frecuentemente será necesario dejar la solución en forma implícita. Por lo tanto, en los problemas siguientes y en los de las secciones 2.5 a 2.8, la terminología "resolver la siguiente ecuación diferencial" indica encontrar la solución explícita si es conveniente hacerlo así, de lo contrario encontrar una relación implícita para la solución.

PROBLEMAS

Resolver cada una de las ecuaciones de los problemas 1 al 8. Dar las regiones del plano xy para las cuales las condiciones del Teorema fundamental de existencia y unicidad son satisfechos.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y(1 + x^3)}$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y^2 \operatorname{sen} x = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$

5. $\dfrac{dy}{dx} = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

6. $x\dfrac{dy}{dx} = (1 - y^2)^{1/2}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$

Para cada uno de los problemas del 9 al 14 encontrar la solución del problema de valores iniciales dado en forma explícita, y determinar (al menos en forma aproximada) el intervalo para el cual está definida.

9. $\operatorname{sen} 2x\, dx + \cos 3y\, dy = 0, \qquad y(\pi/2) = \pi/3$

10. $x\, dx + ye^{-x}\, dy = 0, \qquad y(0) = 1$

11. $\dfrac{dr}{d\theta} = r, \qquad r(0) = 2$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y + x^2y}, \qquad y(0) = -2$

13. $\dfrac{dy}{dx} = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \qquad y(0) = 1$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{1 + 2y}, \qquad y(2) = 0$

15. Resolver la ecuación

$$y^2(1 - x^2)^{1/2}\, dy = \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$$

en el intervalo $-1 < x < 1$.

16. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + b}{cx + d},$$

donde a, b, c y d son constantes.

17. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

donde a, b, c y d son constantes.

*18. Demostrar que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y}$$

no es separable, pero si la variable y es reemplazada por una nueva variable v definida por $v = x/y$, entonces la ecuación es separable en x y v. Encontrar la solución de la ecuación dada usando esta técnica.

*19. *a*) Resolver el problema de valores iniciales $y' = \epsilon y$, $y(0) = y_0$, donde ϵ es una constante positiva. Mostrar que la solución $y = \phi(x)$ tiene el siguiente comportamiento al límite cuando $x \to \infty$:

$$\text{si } y_0 > 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = \infty;$$
$$\text{si } y_0 = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0;$$
$$\text{si } y_0 < 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \phi(x) \; -\infty.$$

b) Supóngase ahora que la ecuación diferencial es cambiada, por la adición del término $-\sigma y^2$ donde σ es un número positivo (pequeño). Resolver el problema de valores iniciales

$$y' = \epsilon y - \sigma y^2, \qquad y(0) = y_0.$$

Mostrar que $y = \phi(x)$ ahora tiene el siguiente comportamiento cuando $x \to \infty$;

$$\text{si } y_0 > 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = \frac{\epsilon}{\sigma};$$
$$\text{si } y_0 = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0.$$

Mostrar que si $y_0 < 0$ entonces $\phi(x)$ se hace no acotado cuando x se aproxima a cierto valor finito dependiente de y_0. La ecuación no lineal de la parte *b*) es importante en muchas aplicaciones; ver la sección 2.9 para algunos ejemplos. Ver también el problema 12 *d*) de la sección 2.3.

2.5 ECUACIONES EXACTAS

Considérese primero la ecuación

$$\psi(x, y) = c \tag{1}$$

donde c es una constante. Suponiendo que la Ec. (1) define a y implícitamente como una función derivable de x, podemos derivar a la Ec. (1) con respecto a x y obtener*

$$\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' = 0. \tag{2}$$

La Ec. (2) es la ecuación diferencial cuya solución está definida por la Ec. (1).

Inversamente, supóngase que la ecuación diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{3}$$

está dada. Si existe una función ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y), \tag{4}$$

y tal que $\psi(x, y) = c$ defina implícitamente a $y = \phi(x)$ como una función derivable de x, entonces

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' = \frac{d}{dx}\{\psi[x, \phi(x)]\}. \tag{5}$$

* Los subíndices denotan derivadas parciales con respecto a la variable indicada por el subíndice.

Como resultado la Ec. (3) se transforma en

$$\frac{d}{dx}\{\psi[x, \phi(x)]\} = 0. \tag{6}$$

En este caso, se dice que la Ec. (3) es una *ecuación diferencial exacta*. La solución de la Ec. (3) o la equivalente Ec. (6), está dada implícitamente por la Ec. (1),

$$\psi(x, y) = c,$$

donde c es una constante arbitraria. En la práctica la ecuación diferencial (3) es frecuentemente escrita en la forma diferencial simétrica

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \tag{7}$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación diferencial

$$2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Por inspección puede verse que el miembro izquierdo es la derivada de x^2y^3.

Por lo tanto la ecuación dada puede reescribirse como

$$\frac{d}{dx}(x^2y^3) = 0$$

y la solución está dada implícitamente por

$$x^2y^3 = c.$$

En este ejemplo simple fue fácil ver que la ecuación diferencial era exacta y, de hecho, se pudo fácilmente encontrar su solución reconociendo que el miembro izquierdo, era la derivada de x^2y^3. Para ecuaciones más complicadas puede no ser posible hacer esto. Un procedimiento sistemático para determinar si una ecuación diferencial dada es exacta está proporcionado por el siguiente Teorema.

Teorema 2.3. Sean las funciones M, N, M_y y N_x continuas en la región rectangular R: $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Entonces la Ec.* (3),

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

es una ecuación diferencial exacta en R si y sólo si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{8}$$

en cada punto de R. Esto es, existe una función ψ que satisface las Ecs. (4),

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y),$$

si y sólo si M y N satisfacen la Ec. (8).

* No es esencial que la región R sea rectangular, sino sólo que sea simplemente conexa. Hablando en términos generales, una región simplemente conexa es aquella que no tiene agujeros; esto es, que está limitada por una curva cerrada simple.

La demostración de este Teorema es en dos partes. Primero mostraremos que si hay una función ψ tal que la Ec. (4) es cierta, entonces se concluye que se satisface la Ec. (8). Calculando M_x y N_y de la Ec. (4) se obtiene

$$M_y(x, y) = \psi_{xy}(x, y), \qquad N_x(x, y) = \psi_{yx}(x, y). \tag{9}$$

La continuidad de ψ_{xy} y ψ_{yx} garantiza su igualdad,* y entonces se sigue la Ec. (8).

Mostraremos ahora que si M y N satisface la Ec. (8), entonces la Ec. (3) es exacta. La demostración involucra la construcción de una función ψ que satisfaga las Ecs. (4).

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y).$$

Integrando la primera de las Ecs. (4) con respecto a x, manteniendo a y constante, se obtiene

$$\psi(x, y) = \int^x M(t, y)\, dt + h(y). \tag{10}$$

La función h es una función arbitraria de y, que juega el papel de la constante arbitraria. Debemos ahora mostrar que siempre es posible elegir $h(y)$ tal que $\psi_y = N$. De la Ec. (10)

$$\psi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int^x M(t, y)\, dt + h'(y)$$

$$= \int^x M_y(t, y)\, dt + h'(y).$$

Poniendo $\psi_y = N$ y resolviendo para $h'(y)$ resulta

$$h'(y) = N(x, y) - \int^x M_y(t, y)\, dt. \tag{11}$$

Para determinar $h(y)$ de la Ec. (11) es esencial que, independientemente de su apariencia, el miembro derecho de la Ec. (11) sea sólo función de y. Para establecer este hecho podemos diferenciar la cantidad en cuestión con respecto a x, obteniendo

$$N_x(x, y) - M_y(x, y),$$

que, de acuerdo con la Ec. (8), se anula. Entonces, a pesar de su forma aparente, el miembro derecho de la Ec. (11) no depende realmente de x, y una sola integración da entonces $h(y)$. Substituyendo $h(y)$ en la Ec. (10), obtenemos como la solución de las Ecs. (4)

* Se requiere la hipótesis de continuidad, ya que de otra manera ψ_{xy} y ψ_{yx} no serían iguales siempre. Las excepciones son funciones bastante peculiares sin embargo, y llegan a encontrarse rara vez.

$$\psi(x, y) = \int^x M(t, y)\, dt + \int^y \left[N(x, s) - \int^x M_s(t, s)\, dt \right] ds. \tag{12}$$

Debería notarse que esta prueba contiene un método para el cálculo de $\psi(x, y)$ que sirve para resolver la ecuación diferencial original (3). Sin embargo, generalmente es mejor hacer todo este proceso cada vez que se necesita, más bien que tratar de recordar el resultado dado en la Ec. (12). Nótese también que la solución se obtiene en forma implícita. Como en la sección previa, puede, o puede no, ser posible encontrar la solución explícita.

Ejemplo 2. Resolver

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y + 2)y' = 0. \tag{13}$$

Es claro que

$$M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y),$$

y la ecuación dada es exacta. Por lo tanto hay una $\psi(x, y)$ tal que

$$\psi_x(x, y) = y \cos x + 2xe^y,$$
$$\psi_y(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2.$$

Integrando la primera de estas ecuaciones se tiene

$$\psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2e^y + h(y). \tag{14}$$

Poniendo $\psi_y = N$ obtenemos

$$\psi_y(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + h'(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2.$$

De aquí que

$$h'(y) = 2,$$

y

$$h(y) = 2y.$$

La constante de integración puede omitirse ya que cualquier solución de la ecuación diferencial previa será suficiente; esto es, no requerimos la más general. Substituyendo $h(y)$ en la Ec. (14) se tiene

$$\psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2y;$$

por lo tanto la solución de la ecuación original está dada implícitamente por

$$y \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2y = c. \tag{15}$$

Ejemplo 3. Resolver

$$(3x^2 + 2xy) + (x + y^2)y' = 0. \tag{16}$$

Aquí

$$M_y(x, y) = 2x, \qquad N_x(x, y) = 1;$$

ya que M_y no es igual a N_x la ecuación dada no es exacta. Para ver que no puede resolverse por el procedimiento antes descrito, vamos a suponer que hay una función ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = 3x^2 + 2xy, \qquad \psi_y(x, y) = x + y^2. \tag{17}$$

Integrando la primera de las Ecs. (17) se tiene

$$\psi(x, y) = x^3 + x^2y + h(y), \tag{18}$$

donde h es una función arbitraria que depende solamente de y. Para tratar de satisfacer la segunda de las Ecs. (17) calculamos ψ_y de la Ec. (18) y la ponemos igual a N, obteniendo

$$\psi_y(x, y) = x^2 + h'(y) = x + y^2$$

ó

$$h'(y) = x + y^2 - x^2. \tag{19}$$

Ya que el miembro derecho de la Ec. (19) depende tanto de x como de y, es imposible resolver la Ec. (19) para $h(y)$. De aquí que no haya $\psi(x, y)$ que satisfaga las dos ecuaciones (17).

PROBLEMAS

Determine cuándo, o cuándo no, las ecuaciones de los problemas del 1 al 12 son exactas. Si lo son, encuéntrese la solución.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$
2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$
3. $(9x^2 + y - 1) - (4y - x)y' = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax - by}{bx - cy}$
7. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)\, dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)\, dy = 0$
8. $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)\, dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)\, dy = 0$
9. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)\, dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)\, dy = 0$
10. $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2)\, dy = 0, \qquad x > 0$
11. $(x \ln y + xy)\, dx + (y \ln x + xy)\, dy = 0; \qquad x > 0, \qquad y > 0$
12. $\dfrac{x\, dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \dfrac{y\, dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$
13. Encuentre el valor de b para el cual las siguientes ecuaciones son exactas, y hecho esto resuélvanse para este valor de b.
    a) $(xy^2 + bx^2y)\, dx + (x + y)x^2\, dy = 0$
    b) $(ye^{2xy} + x)\, dx + bxe^{2xy}\, dy = 0$
14. Considérese la ecuación diferencial exacta

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0.$$

Encuéntrese una fórmula implícita $\psi(x, y) = c$ para la solución análoga a la Ec. (12) integrando primero la ecuación $\psi_y = N$, en lugar de $\psi_x = M$, como en el texto.

15. Muéstrese que cualquier ecuación que es separable, esto es, de la forma

$$M(x) + N(y)y' = 0,$$

es también exacta.

2.6 FACTORES INTEGRANTES

Mostraremos ahora cómo se pueden extender los métodos de la sección 2.5 a una clase más extensa de problemas. Considérese una ecuación de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1}$$

Si esta ecuación no es ya exacta, trataremos de elegir una función μ que puede depender tanto de x como de y, tal que la ecuación

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = 0 \tag{2}$$

sea exacta. La función μ es llamada un *factor integrante*. La Ec. (2) puede resolverse entonces por los métodos de la sección 2.5, y sus soluciones satisfarán la ecuación original (1). Este enfoque es una extensión del método desarrollado en la sección 2.1 para ecuaciones lineales.

Con el objeto de investigar la posibilidad de llevar a cabo este procedimiento, recordamos de la sección 2.5 que la Ec. (2) es exacta si y sólo si

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x. \tag{3}$$

Ya que M y N son funciones dadas, el factor de integración μ debe satisfacer la ecuación diferencial parcial de primer orden

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \tag{4}$$

Si una función μ que satisface la Ec. (4) se puede encontrar, entonces la Ec. (2) será exacta. La solución de la Ec. (2) puede entonces obtenerse por el método de la sección 2.5 y estará dada implícitamente por

$$\psi(x, y) = c.$$

Esta relación define también la solución de la Ec. (1), debido a que el factor integrante μ puede ser cancelado en todos los términos de la Ec. (2).

Una ecuación diferencial parcial de la forma (4) puede tener más de una solución; en este caso, cualquiera de las soluciones puede ser usada como un factor integrante de la Ec. (1). La posible no unicidad del factor integrante está ilustrada en el ejemplo 3.

Por desgracia, la Ec. (4), que determina el factor integrante, es ordinariamente al menos, tan difícil de resolver como la ecuación original (1). Por lo tanto, aun cuando en principio los factores integrantes son una herramienta poderosa para resolver ecuaciones diferenciales, en la práctica pueden encontrarse usualmente sólo en casos especiales. Algunos de esos casos son mostrados en los siguientes ejemplos, y en los problemas 10 y 11 al final de la sección.

Ejemplo 1. Verificar que $\mu(x, y) = (xy^2)^{-1}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial

$$(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0, \tag{5}$$

y después encontrar su solución.

Como $M(x, y) = y^2 + xy$, y $N(x, y) = -x^2$, se sigue que $M_y(x, y) = 2y + x$, y $N_x(x, y) = -2x$; por lo tanto la ecuación dada no es exacta. Para mostrar que $\mu(x, y) = (xy^2)^{-1}$ es un factor integrante para esta ecuación, es suficiente multiplicar la Ec. (5) por $\mu(x, y)$, y así obtener

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0;$$

Esta última ecuación es fácil verificar que es exacta. Se encuentra, por el método de la sección 2.5, que su solución está dada implícitamente por

$$\ln|x| + \frac{x}{y} = c; \qquad x \neq 0, \qquad y \neq 0. \tag{6}$$

Nótese que $y = 0$ es también una solución, aunque no está dada por la Ec. (6).

Ejemplo 2. Las dos situaciones más importantes en que pueden encontrarse factores integrantes simples ocurren cuando μ es función de solamente una de las variables x, y, y no de ambas. Vamos a determinar las condiciones necesarias sobre M y N tales que $M\,dx + N\,dy = 0$ tiene un factor integrante μ que depende sólo de x.

Suponiendo que μ solamente es función de x, tenemos

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \qquad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}.$$

Por lo tanto, si $(\mu M)_y$ es igual a $(\mu N)_x$, es necesario que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{7}$$

Si $(M_y - N_x)/N$ es una función solamente de x, entonces hay un factor integrante μ que también depende sólo de x; además, $\mu(x)$ puede encontrarse resolviendo la ecuación *lineal* de primer orden (7).

Ejemplo 3. Encontrar un factor integrante para la ecuación

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{8}$$

y resolver entonces la ecuación.

Al calcular la cantidad $(M_y - N_x)/N$ encontramos que

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el ejemplo 2, hay un factor integrante μ que es una función sólo de x, y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}.$$

De aquí que

$$\mu(x) = x. \tag{9}$$

Multiplicando la Ec. (8) por este factor integrante se obtiene

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{10}$$

que es una ecuación exacta. Su solución se encuentra fácilmente por el método de la sección 2.5 dada implícitamente por

$$x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 = c. \tag{11}$$

El lector puede verificar también, como en el ejemplo 1, que el segundo factor integrante de la Ec. (8) está dado por $\mu(x, y) = 1/xy(2x + y)$, y que se obtiene la misma solución, aunque con mucha mayor dificultad, si se usa ese factor integrante (ver problema 12).

PROBLEMAS

Mostrar que las ecuaciones de los problemas 1 a 3 no son exactas, pero que se pueden transformar en exactas multiplicando por el factor integrante dado. Resolver las ecuaciones

1. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0; \quad \mu(x, y) = 1/xy^3$
2. $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right) dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right) dy = 0; \quad \mu(x, y) = ye^x$
3. $y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0; \quad \mu(x, y) = y$

En cada uno de los problemas del 4 al 9 encontrar un factor integrante, y resolver entonces la ecuación dada

4. $(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$
5. $y' = e^{2x} + y - 1$
6. $dx + \left(\dfrac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right) dy = 0$
7. $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$
8. $e^x\,dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\,dy = 0$
9. $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right) dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + 3\dfrac{y}{x}\right) dy = 0$

10. Mostrar que si $(N_x - M_y)/M = Q$, donde Q es sólo función de y, entonces la ecuación diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tiene un factor integrante de la forma

$$\mu(y) = \exp\int^y Q(t)\,dt.$$

*11. Mostrar que si $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, donde R depende solamente de la cantidad xy, entonces la ecuación diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu(xy)$. Encontrar una fórmula general para este factor integrante.

*12. Resolver la ecuación diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0,$$

usando el factor integrante

$$\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}.$$

Verificar que la solución es la misma que la obtenida en el ejemplo 3 con un factor integrante diferente.

2.7 ECUACIONES HOMOGENEAS

Los dos tipos principales de ecuaciones no lineales de primer orden que pueden resolverse por procesos directos de integración, son aquellos en los que las variables se separan, y en los que las ecuaciones son exactas. La sección 2.6 trata del uso de factores integrantes para resolver ciertos tipos de ecuaciones reduciéndolas a ecuaciones exactas. Esta sección introducirá otra técnica, la del cambio de variables, que puede usarse algunas veces para simplificar una ecuación diferencial y, por lo tanto, hacer posible su solución (o más conveniente). Generalmente hablando, la substitución apropiada tendrá que ser sugerida por la aparición repetida de alguna combinación de variables, o alguna otra peculiaridad en la estructura de la ecuación.

La clase más importante de ecuaciones para la que puede establecerse una regla definida es la clase de las ecuaciones diferenciales homogéneas.* Una ecuación de la forma

* La palabra homogénea se usa en más de una forma en el estudio de ecuaciones diferenciales. El lector debe estar alerta para distinguir las diferencias cuando éstas se encuentren.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se dice que es homogénea siempre que la función f no dependa de x y y separadamente, sino solamente de sus razones y/x o x/y. Por lo tanto, las ecuaciones homogéneas son de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Considérense los ejemplos siguientes:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2\dfrac{y}{x}$;

b) $\dfrac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \dfrac{x+y}{x-y} = \ln \dfrac{1}{y/x} + \dfrac{1 + (y/x)}{1 - (y/x)}$;

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 + 2xy}{x^2}$.

Por lo tanto a) y b) son homogéneas, ya que el miembro derecho de cada una de ellas puede ser expresado como una función de y/x; como c) no puede escribirse así, no es homogénea. Usualmente es fácil decir si una ecuación dada es homogénea o no; para ecuaciones complicadas el criterio dado en el problema 15 puede ser útil.

La forma de una ecuación homogénea sugiere que puede simplificarse introduciendo una nueva variable,* la cual denotaremos por v, para representar la razón de y a x. Por lo tanto

$$y = xv, \tag{2}$$

y la Ec. (1) se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = F(v). \tag{3}$$

Viendo a v como la nueva variable dependiente (reemplazando a y), debemos considerar a v como una función de x, y reemplazar a dy/dx en la Ec. (3) por una expresión apropiada en términos de v. Derivando la Ec. (2) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v,$$

y de aquí la Ec. (3) se transforma en

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v). \tag{4}$$

El hecho más significativo con respecto a la Ec. (4) es que las variables x y v *siempre* pueden ser separadas, independientemente, de la forma de la función F; en efecto,

* Leibnitz en 1691 fue el primero en usar esta técnica.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}. \tag{5}$$

Resolviendo la Ec. (5) y después reemplazando v por y/x obtenemos la solución de la ecuación original.

De este modo cualquier ecuación homogénea puede transformarse en una cuyas variables son separables usando la substitución (2). Desde un punto de vista práctico, por supuesto, puede ser posible o no la evaluación de la integral requerida para la solución de la Ec. (5) por métodos elementales. Más aún, una ecuación homogénea podría pertenecer también a una clase de ecuaciones ya discutidas; podría ser exacta o lineal, por ejemplo. En tales casos se pueden escoger métodos para encontrar su solución.

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}. \tag{6}$$

Escribiendo esta ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

mostramos que es homogénea. Las variables no pueden ser separadas, ni es exacta, ni tiene un factor integrante obvio. Esto nos conduce a la substitución (2), que transforma a la ecuación dada en

$$x\frac{dv}{dx} + v = v^2 + 2v.$$

De aquí que

$$x\frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

o, separando las variables,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v+1)}.$$

Desarrollando el miembro derecho en fracciones parciales tenemos

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv.$$

Integrando ambos miembros llegamos a

$$\ln|x| + \ln|c| = \ln|v| - \ln|v+1|,$$

donde c es una constante arbitraria. De aquí, combinando los logaritmos y tomando la exponencial en ambos miembros, obtenemos

$$cx = \frac{v}{v+1}.$$

Finalmente, substituyendo v en términos de y tenemos la solución de la Ec. (6) en la forma

$$cx = \frac{y/x}{(y/x) + 1} = \frac{y}{y + x}.$$

Resolviendo para y obtenemos

$$y = \frac{cx^2}{1 - cx}.$$

Algunas veces es útil transformar ambas variables, la dependiente y la independiente. Por ejemplo, en los problemas 9, 10, 11 y 14 un cambio en ambas variables se requiere para hacer a la ecuación homogénea, después de lo cual, un cambio más de la variable dependiente nos conduce a la solución del problema.

PROBLEMAS

Mostrar que las ecuaciones de los problemas del 1 al 8 son homogéneas, y encontrar sus soluciones.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$
2. $2y\,dx - x\,dy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$
6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{2x + y}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$
8. $(x^2 + 3xy + y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

*9. *a*) Encontrar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{2x - y}.$$

b) Encontrar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4}.$$

Sugerencia: Con el objeto de reducir la ecuación de la parte *b*) a la de la parte *a*), considérese una substitución preliminar de la forma

$$x = X - h, \qquad y = Y - k.$$

Escójanse las constantes h y k de tal manera que la ecuación sea homogénea en las variables X y Y.

*10. Resolver $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y + 15}{2x + y + 7}$. Ver la Sugerencia del problema 9*b*.

*11. Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y - 5}{x - y - 1}$. Ver la Sugerencia del problema 9*b*.

12. Encontrar la solución de la ecuación

$$(3xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0,$$

y compárese con la solución obtenida por otros métodos en el ejemplo 3 y el problema 12 de la sección 2.6.

*13. Mostrar que si

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

es una ecuación homogénea, entonces tiene a

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}$$

como un factor integrante.

*14. *a*) Probar que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + m}{cx + dy + n},$$

donde a, b, c, d, m y n son constantes, siempre podemos reducirla a una ecuación homogénea con una transformación apropiada de la forma

$$x = X - h, \qquad y = Y - k,$$

en tanto que $ad - bc \neq 0$.

b) Encontrar una transformación que reduzca la ecuación dada en otra cuyas variables sean separables cuando $ad - bc = 0$. Encontrar la solución para este caso.

*15. Mostrar que la ecuación $y' = f(x, y)$, es homogénea si $f(x, y)$ es tal que

$$f(x, tx) = f(1, t),$$

donde t es un parámetro real. Use este hecho para determinar si cada una de las ecuaciones siguientes es homogénea.

a) $y' = \frac{x^3 + xy + y^3}{x^2y + xy^2}$

b) $y' = \ln x - \ln y + \frac{x + y}{x - y}$

c) $y' = \frac{(x^2 + 3xy + 4y^2)^{1/2}}{x + 2y}$

d) $y' = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2}$

2.8 PROBLEMAS DIVERSOS

Esta sección consiste de una lista de 32 problemas que pueden resolverse por los métodos de las secciones anteriores. Están presentados de tal forma que el lector pueda tener alguna práctica en identificar el método o métodos aplicables a la ecuación dada.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 2y}{x}$
2. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{3 + 3y^2 - x}, \quad y(0) = 0$

4. $(x + e^y)\, dy - dx = 0$

5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + y^2 + 1}{x^2 + 2xy}$

6. $x\dfrac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \quad y(1) = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$ *Indicación:* Sea $u = x^2$.

8. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y(2) = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + 1}{x^2 + 2y}$

10. $(3y^2 + 2xy)\, dx - (2xy + x^2)\, dy = 0$

11. $(x^2 + y)\, dx + (x + e^y)\, dy = 0$

12. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

13. $x\, dy - y\, dx = (xy)^{1/2}\, dx$

14. $(x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0, \quad y(2) = 3$

15. $(e^x + 1)\dfrac{dy}{dx} = y - ye^x$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + 3y$

18. $(2y + 3x)\, dx = -x\, dy$

19. $x\, dy - y\, dx = 2x^2y^2\, dy, \quad y(1) = -2$

20. $y' = e^{x+y}$

21. $xy' = y + xe^{y/x}$

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$

23. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0$

24. $2 \operatorname{sen} y \cos x\, dx + \cos y \operatorname{sen} x\, dy = 0$

25. $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$

26. $(2y + 1)\, dx + \left(\dfrac{x^2 - y}{x}\right) dy = 0$

27. $(\cos 2y - \operatorname{sen} x)\, dx - 2 \tan x \operatorname{sen} 2y\, dy = 0$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{1 - 2xy^2}, \quad y(0) = 1$

31. $(x^2y + xy - y)\, dx + (x^2y - 2x^2)\, dy = 0$

32. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}, \quad y(1) = -2$

2.9 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones diferenciales son de interés a aquellos que no son matemáticos, principalmente por la posibilidad de usarlas para investigar una amplia variedad de procesos en las ciencias físicas, biológicas y sociales. Hay tres pasos identificables en este proceso, que siempre se presentan sin importar el campo específico de aplicación.

En primer lugar, es preciso trasladar la situación física a términos matemáticos. Este se hace generalmente haciendo suposiciones sobre los fenómenos observados, de tal manera que estas suposiciones sean consistentes con el mundo físico real. Por ejemplo, se ha observado que los materiales radiactivos decaen a una velocidad proporcional a la cantidad de materia presente, que el calor pasa de un cuerpo caliente a otro menos caliente a una velocidad proporcional a la diferencia de temperatura, que los objetos se mueven de acuerdo con las leyes de movimiento de Newton, y que las comunidades aisladas de insectos crecen a una velocidad proporcional a la población actual. Cada una de estas afirmaciones involucra un grado de cambio (derivada) y consecuentemente, cuando se expresan matemáticamente, toman la forma de una ecuación diferencial.

Es importante darse cuenta de que las ecuaciones matemáticas son casi siempre sólo una descripción aproximada de los procesos reales, ya que están basadas en observaciones que son, a su vez, aproximaciones a la realidad. Por ejemplo, los cuerpos que se mueven a velocidades comparables a la velocidad de la luz, no están gobernados por las leyes de Newton, las comunidades de insectos no crecen indefinidamente (como podría pensarse al resolver la ecuación diferencial correspondiente), debido a las limitaciones eventuales de alimento, y la transferencia de calor está afectada por otros factores además de la diferencia de temperatura. Más aún, el proceso de formular un problema físico matemáticamente, involucra a menudo el reemplazamiento conceptual de un proceso discreto por uno continuo. Por ejemplo, el número de miembros en una comunidad de insectos cambia por cantidades discretas; sin embargo, si la población es grande, parece razonable considerarla como una variable continua y hasta hablar de su derivada. Alternativamente, se puede adoptar el punto de vista de que las ecuaciones matemáticas describen exactamente la operación de un modelo simplificado, que ha sido construido (o concebido de) tal que represente las características más sobresalientes del proceso real.

En cada caso, una vez que se ha formulado el problema matemáticamente, frecuentemente se encara uno con el problema de resolver una o más ecuaciones diferenciales o, si esto no es posible, de averiguar tanto como sea posible acerca de las propiedades de la solución. Puede suceder que este problema matemático sea bastante difícil y que, si así sucede, más aproximaciones sean indicadas en esta etapa para hacer más tratable el problema matemático. Por ejemplo, una ecuación no lineal puede aproximarse con una lineal, o una función que varía lentamente puede substituirse por su valor promedio. Naturalmente, tales aproximaciones deberán ser examinadas también desde el punto de vista físico, para asegurarse de que el problema matemático simplificado aún refleja las características principales del proceso físico que se está investigando. Al mismo tiempo, un conocimiento íntimo de

la física del problema puede sugerir aproximaciones matemáticas razonables, que hagan más susceptible al análisis el problema matemático. El juego entre el entendimiento del fenómeno físico y el conocimiento de las técnicas matemáticas y sus limitaciones, es característico de las matemáticas aplicadas, y es indispensable para tener éxito en la construcción de modelos matemáticos para procesos físicos complicados.

Finalmente, habiendo obtenido la solución (o al menos alguna información acerca de ella), ésta deberá interpretarse en términos del contexto en que surgió el problema. En particular, uno siempre debe verificar si la solución matemática es físicamente plausible. Esto requiere, como primer requisito, que la solución exista, que sea única, y que dependa continuamente de los datos del problema. Esta última consideración es importante porque los coeficientes en la ecuación diferencial y las condiciones iniciales, se obtienen a menudo como resultado de la medida de alguna cantidad física, y por lo tanto son susceptibles de pequeños errores. Si estos pequeños errores conducen a grandes (o discontinuos) cambios, en la solución del problema matemático correspondiente, que no se observan físicamente, entonces debe reexaminarse la relevancia con que el modelo matemático representa al sistema físico que se trata de describir. Por supuesto, el hecho de que una solución matemática parezca razonable no es suficiente garantía de que sea correcta. Sin embargo, si hay serias inconsistencias con las observaciones cuidadosas que se hagan del sistema físico, esto sugiere que ha habido errores al resolver el problema matemático, o que el modelo matemático en sí, es demasiado burdo.

Los ejemplos que siguen en esta sección y en la siguiente, son típicos de las aplicaciones que se pueden encontrar con respecto a las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo 1 **(Decaimiento Radiactivo).** Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a la cantidad de material presente. Un bloque de este material tiene originalmente una masa de Q_0 gramos. Al ser observado después de 24 horas, ha experimentado una reducción de masa del 10%. Encuéntrese una expresión para la masa del cuerpo a un tiempo cualquiera. Descúbrase también el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que el bloque decaiga a la mitad de su masa original.

Sea $Q(t)$ la masa del material al tiempo t. Ya que la velocidad de cambio de Q es proporcional a Q misma, tenemos

$$Q'(t) = kQ(t), \tag{1}$$

donde k es un factor de proporcionalidad constante. La ecuación (1) puede resolverse ya sea como una ecuación lineal o por separación de variables, y su solución general es

$$Q(t) = ce^{kt}. \tag{2}$$

Si el origen de la escala del tiempo se elige como el instante en el que la masa del material es Q_0, entonces la condición inicial es $Q(0) = Q_0$. Por lo tanto c es igual a Q_0, y la ecuación (2) se transforma en

$$Q(t) = Q_0e^{kt}. \tag{3}$$

Si se conoce k, entonces la Ec. (3) da una fórmula para la masa Q presente a cualquier tiempo. Si no se conoce k por anticipado, se necesita entonces una segunda observación para determinarla. En el problema dado, $Q(24)$ es igual a $9Q_0/10$. De aquí que

$$\tfrac{9}{10}Q_0 = Q_0e^{24k},$$

y

$$k = -\tfrac{1}{24}\ln(10/9) \cong -0.00439. \tag{4}$$

Usando este valor de k en la Ec. (3) se obtiene la expresión deseada para $Q(t)$.

El período de tiempo durante el cual se reduce la masa a la mitad de su valor original es conocido como la *vida media* del material. Si t_1 es el tiempo al cual $Q(t)$ es igual a $Q_0/2$, entonces, de la Ec. (3),

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0e^{kt_1},$$

ó

$$t_1 = -\frac{1}{k}\ln 2. \tag{5}$$

La Ec. (5) es la relación entre la vida media del material (cualquiera que éste sea), y el grado o velocidad de decaimiento, para cualquier material que obedezca la ecuación diferencial (1). Usando el valor de k dado por la Ec. (4) encontramos que

$$t_1 = \frac{24\ln 2}{\ln(10/9)} \cong 158 \text{ (horas)}. \tag{6}$$

Ejemplo 2 **(Interés Compuesto).** Supóngase que una cantidad de dinero S_0 se invierte de tal forma que dé un interés de 4 por ciento trimestral. El valor de la inversión $S(t)$ a cualquier tiempo puede calcularse algebraicamente o por referencia a las tablas de interés compuesto. Sin embargo, vamos a aproximarnos a la situación real con un modelo matemático, para el cual vamos a suponer que el interés se acumula continuamente. Aunque esta suposición parece bastante exagerada, nos permite escribir la ley de crecimiento de la inversión como una ecuación diferencial, esto es

$$S'(t) = 0.04S(t). \tag{7}$$

La solución de la ecuación diferencial (7), que satisface también la condición inicial $S(0) = S_0$, es

$$S(t) = S_0e^{0.04t}. \tag{8}$$

En la tabla 2.1 enlistamos los valores de $S(t)/S_0$ como dados por la Ec. (8) para diferentes valores de t. Los valores exactos de $S(t)/S_0$ para un interés compuesto del 4% trimestral se dan también con el objeto de establecer una comparación.

Para valores relativamente pequeños de t el modelo matemático continuo da resultados bastantes cercanos a los reales. Sin embargo, si el período de tiempo se mide en siglos, el efecto piramidal del interés compuesto continuo, causa eventualmente serias discrepancias. Este ejemplo ilustra el hecho de que se necesita tener cuidado para determinar el rango dentro del cual son válidas las suposiciones simplificadas. Ilustra también, no obstante, que en intervalos limitados se pueden hacer a veces suposiciones drásticas, sin afectar seriamente la exactitud de los resultados.

TABLA 2.1

Años	$S(t)/S_0$ Exacto	$S(t)/S_0$ de la Ec. (8)	Error (Porcentaje)
2	1.0829	1.0833	0.04
5	1.2202	1.2214	0.1
10	1.4889	1.4918	0.2
20	2.2168	2.2255	0.4
40	4.9142	4.9530	0.8
80	24.149	24.533	1.5
200	2866	2981	4.0
400	8,214,000	8,886,000	8.2

Ejemplo 3 **(Mezclado).** Considérese un tanque que contiene, al tiempo $t = 0$, Q_0 libras de sal disueltas en 100 gal. de agua. Supóngase que agua con una dilución de 1/4 de libra por cada galón entra al tanque a una velocidad de tres galones por minuto, y que después de que la solución en el tanque ha sido agitada muy bien, sale del tanque a la misma velocidad. Encontrar una expresión para la cantidad de sal $Q(t)$ en el tanque al tiempo t.

La velocidad de cambio de sal en el tanque al tiempo t, $Q'(t)$, deberá ser igual a la velocidad con la que la sal entra al tanque menos la velocidad a la que sale. La velocidad a la que entra es 1/4 lb/gal multiplicado por 3 gal/minuto. La velocidad a la cual la sal sale es $(Q(t)/100)$ lb/gal multiplicado por 3 gal/minuto. De aquí que

$$Q'(t) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{100}Q(t) \tag{9}$$

es la ecuación diferencial que gobierna el proceso. La ecuación (9) es lineal y su solución es

$$Q(t) = 25 + ce^{-0.03t}, \tag{10}$$

donde c es arbitrario. La condición inicial

$$Q(0) = Q_0 \tag{11}$$

requiere que c sea igual a $Q_0 - 25$, y de aquí que

$$Q(t) = 25(1 - e^{-0.03t}) + Q_0e^{-0.03t}. \tag{12}$$

El segundo término del miembro derecho de la Ec. (12) representa la porción original de sal que permanece en el tanque al tiempo t. Este término se hace más y más pequeño con el transcurso del tiempo cuando la solución original es desaguada del tanque. El primer término del miembro derecho de la Ec. (12) da la cantidad de sal en el tanque al tiempo t durante la acción del proceso de flujo. Cuando t se hace grande este término se aproxima al valor constante 25 (libras). Es también claro físicamente que éste deberá ser el valor límite de Q cuando la solución original en el tanque se reemplaza más y más completamente por la entrada de agua con una concentración de 1/4 lb/gal.

Ejemplo 4 **(Epidemias).** Se ha desarrollado una teoría matemática de las epidemias a lo largo de las líneas siguientes. Supóngase que hay una comunidad de n miembros que contiene p individuos infectados y q no infectados pero susceptibles de infectarse, donde $p + q = n$. Alternativamente, sea x la proporción de miembros enfermos y y la de sanos. Entonces $x = p/n$, $y = q/n$ y $x + y = 1$. Si n es grande, es razonable pensar a x y y como variables continuas; entonces la velocidad a la que se esparce la enfermedad es dx/dt. Suponiendo que la enfermedad se esparce por contacto entre los individuos enfermos y sanos de la comunidad, entonces dx/dt es proporcional al número de contactos. Si los miembros de ambos grupos se mueven libremente entre ellos, el número de contactos se vuelve proporcional al producto de x y y. Por lo tanto llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \beta xy$$

ó

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(1 - x), \tag{13}$$

donde β es un factor de proporcionalidad positivo. La condición inicial es

$$x(0) = x_0, \tag{14}$$

donde x_0 es la densidad de los individuos infectados a $t = 0$.

La Ec. (13) es separable, y puede escribirse como

$$\frac{dx}{x(1 - x)} = \beta\, dt,$$

o, usando un desarrollo en fracciones parciales, en la forma

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}\right) dx = \beta\, dt.$$

De aquí que

$$\ln x - \ln(1 - x) = \beta t + C; \tag{15}$$

nótese que x y $1 - x$ son intrínsecamente positivas de tal forma que no se necesitan poner valores absolutos. De la Ec. (15) se sigue que

$$\frac{x}{1-x} = ce^{\beta t}, \tag{16}$$

donde $c = e^C$. La condición inicial requiere que $c = x_0/(1 - x_0)$. Usando este valor de c en la Ec. (16) y resolviendo para x, obtenemos

$$x = \frac{x_0 e^{\beta t}}{1 - x_0 + x_0 e^{\beta t}} = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)e^{-\beta t}}. \tag{17}$$

Si $x_0 > 0$, entonces $x \to 1$ cuando $t \to \infty$ sin considerar el valor real de x_0. Por lo tanto, no importa cuán pequeño sea el número inicial de individuos contagiados, la epidemia se esparciría finalmente a toda la población.

El modelo matemático que se acaba de describir está claramente fuera de la realidad en algunos aspectos. Por ejemplo, si la epidemia es bastante seria, ocurre inmediatamente una cuarentena parcial ya que todos los individuos enfermos se restringen en sus actividades. Las autoridades sanitarias pueden imponer además otra cuarentena de alcances mayores, para restringir la posibilidad de contagio entre los individuos enfermos y los sanos. Finalmente, muchas enfermedades son contagiosas sólo por un período corto de tiempo, mientras que en el modelo aquí usado se supone que los individuos enfermos permanecen así indefinidamente. Todos estos factores tienden a hacer que la diseminación de la enfermedad sea realmente lenta en comparación con la predicha por el modelo matemático.

Ejemplo 5 **(Trayectorias Ortogonales).** Considérese una familia de parábolas definidas por

$$y = kx^2, \tag{18}$$

donde k es una constante arbitraria. Si $k > 0$, las parábolas se abren hacia arriba, y si $k < 0$ se abren hacia abajo, como los muestran las curvas dibujadas en la figura 2.5. Encuéntrese la familia de curvas que intersecta a la familia dada de parábolas ortogonalmente en cada punto.

El primer paso consiste en obtener una expresión para la pendiente en un punto dado (x, y) de la parábola que pasa a través de ese punto. Derivando la Ec. (18) encontramos que

$$\frac{dy}{dx} = 2kx, \tag{19}$$

una expresión que depende tanto de k como de x y y. Sin embargo, se puede concluir de la Ec. (18) que k es igual a y/x^2, y substituyendo para k en la Ec. (19) se tiene que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{(1)} = \frac{2y}{x}. \tag{20}$$

El superíndice (1) sirve meramente para identificar que ésas son las pendientes de la primera familia de curvas. La familia de curvas ortogonal deseada, se

caracteriza por el hecho de que sus pendientes, denotadas por $(dy/dx)^{(2)}$, son los recíprocos negativos de las dadas por la Ec. (20). Entonces

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} = -\frac{x}{2y}. \tag{21}$$

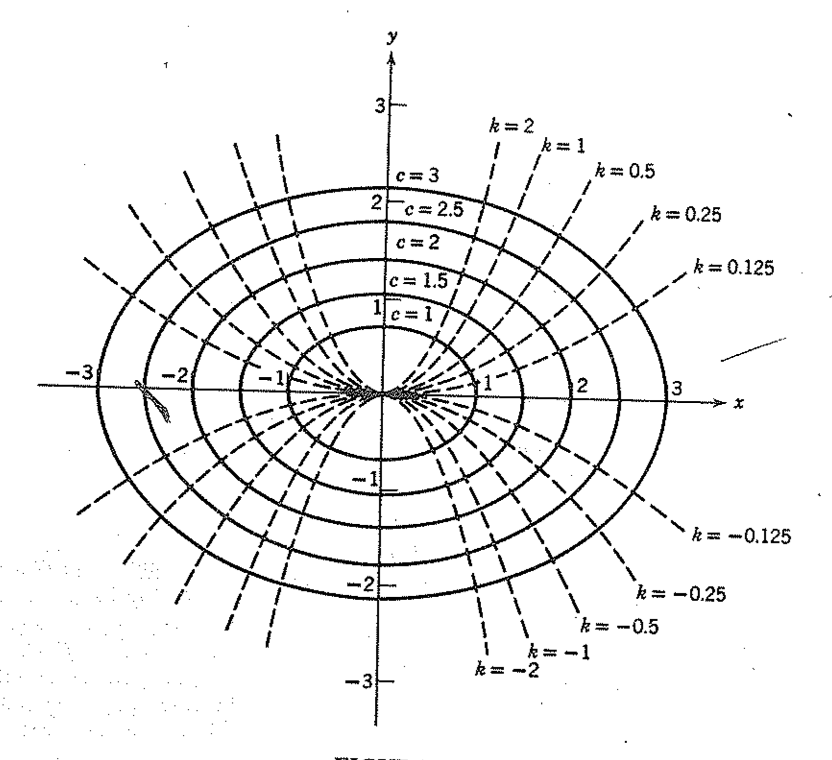


FIGURA 2.5

La Ec. (21) puede resolverse separando las variables, con el resultado de que

$$x^2 + 2y^2 = c, \tag{22}$$

donde c es una constante arbitraria (no negativa). Esta familia de curvas es la familia de elipses indicada por las curvas a trazo continuo de la figura 2.5.

Las familias de curvas que son mutuamente ortogonales, se dice que son trayectorias ortogonales unas a otras. Tales familias de trayectorias ortogonales se encuentran en varias ramas de la física. Por ejemplo, en el campo electrostático las líneas de fuerza y las de potencial constante (equipotenciales) son ortogonales unas a otras en todas partes.

PROBLEMAS

1. Supóngase que una suma de dinero está colocada a un interés que se acumula continuamente. Si la cantidad original es S_0, ¿cuándo el capital alcanzará la suma $S = 2S_0$ si el grado de interés anual es 3%? , 4%? , 5%?

2. Un cierto hombre tiene una fortuna que aumenta a una velocidad proporcional al cuadrado de su riqueza presente. Si tenía un millón de pesos hace un año, y ahora tiene dos millones, ¿cuánto tendrá dentro de seis meses? ¿dentro de dos años?

3. Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a su cantidad de material presente. Un bloque de ese material tiene originalmente una masa de 100 grs, y, cuando se le observa después de 20 años, su masa ha disminuido a 80 grs. Encuentre una expresión para la masa del material como función del tiempo. Encuentre también la vida media del material.

4. Un cierto material radiactivo tiene una vida media de dos horas. Encuentre el intervalo de tiempo requerido para que una cantidad dada de este material decaiga hasta un décimo de su masa original.

5. Un isótopo radiactivo del carbono, conocido como carbono 14, obedece la ley del decaimiento radiactivo

$$\frac{dQ}{dt} = kQ,$$

donde $Q(t)$ denota la cantidad de carbón 14 presente al tiempo t.

a) Determine k si la vida media del carbono 14 es de 5 568 años.

b) Si Q_0 representa la cantidad de carbono 14 presente al tiempo $t = 0$. Encuentre una expresión para Q como función del tiempo.

c) En años recientes se ha hecho posible hacer medidas que conducen a conocer la razón $Q(t)/Q_0$ para algunos restos de maderas y plantas que contienen cantidades residuales de carbono 14. Los resultados de *a*) y *b*) pueden usarse entonces para determinar el tiempo pasado desde la muerte de esos restos; esto es, el período durante el cual ha tenido lugar el decaimiento. Encuéntrese una expresión para t en términos de Q, Q_0 y k. Encuéntrese el intervalo desde que principió el decaimiento si el valor actual de Q/Q_0 es 0.20. Esta técnica de obtener datos provenientes del radiocarbono es de gran valor para los arqueólogos. El método está limitado, sin embargo, a períodos de 30 000 años o menos, ya que para períodos más largos la cantidad de carbono 14 presente es tan pequeña que no puede determinarse con exactitud.

6. Supóngase que la población de la Tierra cambia a una velocidad proporcional a la población actual. (Una hipótesis más exacta respecto de la ley de crecimiento de la población se considera en el problema 7.) Supóngase además que al tiempo $t = 0$ (1650 d.C.), la población de la Tierra era 250 millones (2.5×10^8); al tiempo $t = 300$ (1950 d.C.) su población fue 2.5 billones (2.5×10^9). Encuéntrese una expresión que dé la población de la Tierra como función del tiempo. Suponiendo que la mayor población que puede soportar la Tierra es de 25 billones (2.5×10^{10}), ¿cuándo se alcanzará ese límite?

7. En una cierta comunidad aislada, $p(t)$ la velocidad de crecimiento de la población dp/dt es una función de la población p; de aquí que

$$\frac{dp}{dt} = f(p).$$

a) La expresión más simple para $f(p)$ es $f(p) = \epsilon p$, donde ϵ es una constante positiva. Encontrar $p(t)$ en este caso si $p(0) = p_0$. ¿Cuál es el $\lim_{t\to\infty} p(t)$?

b) Una suposición mejor en muchas situaciones es que $f(p) = \epsilon p - kp^2$ donde ϵ y k son ambas constantes positivas. El término $-kp^2$ puede necesitarse, por ejemplo, si condiciones multitudinarias para grandes valores de p dan como resultado un aumento en el grado de muertes y una disminución en el ritmo de nacimientos. Si $p(0)$ es igual a p_0, encontrar una expresión para la población como función del tiempo. Encontrar el límite de la población cuando $t \to \infty$. Comparar estos resultados con los de la parte *a*). Nótese que, aún si k es muy pequeña, la naturaleza de la solución cambia radicalmente (para p grande) tan pronto como se introduce el término cuadrático de $f(p)$.

8. Se sabe de observaciones experimentales que, con una exactitud satisfactoria en muchas circunstancias, la temperatura superficial de un objeto cambia a una velocidad proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la de sus alrededores (la temperatura ambiente). Esto se conoce algunas veces como la ley de enfriamiento de Newton. Entonces, si $u(t)$ es la temperatura del objeto al tiempo t, y u_0 es la temperatura ambiente constante, tenemos la relación

$$\frac{du}{dt} = k(u - u_0),$$

donde k es un factor de proporcionalidad constante.

a) Encontrar la solución que satisface la condición inicial $u(0) = u_1$.

b) Suponer que la temperatura de una taza de café es de 200°F cuando se acaba de servir. Un minuto después se ha enfriado a 190°F en un cuarto que está a 70°F. ¿Qué tan grande debe ser el período que debe transcurrir (suponiendo que se aplica la ley de enfriamiento de Newton) antes de que el café alcance una temperatura de 150°F?

9. Suponer que una gota de lluvia esférica se evapora a una velocidad proporcional a su área superficial. Si originalmente el radio es de 3 mm, y una hora después se ha reducido a 2 mm, encontrar una expresión para el radio de la gota como función del tiempo.

10. Considérese un tanque usado en ciertos experimentos de hidrodinámica. Después de un experimento el tanque contiene 200 l de una solución de tintura con una concentración de 1 gr/l. Para preparar el experimento siguiente el tanque se limpia con agua fresca que fluye al tanque a razón de 2 l/min, y la solución bien agitada sale del tanque con la misma razón. Encontrar el tiempo que pasa antes de que la concentración de la tintura en el tanque alcance 1% de su valor original.

11. Un tanque contiene originalmente 100 galones de agua fresca. Se vierte entonces agua que contiene media libra de sal por galón dentro del tanque a una velocidad de 2 galones/minuto, y se permite que salga la mezcla con la misma rapidez. Después de diez minutos se para el proceso y se vierte agua fresca dentro del tanque a la velocidad de 2 gal/min, dejando salir también la mezcla a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal en el tanque al final de los 20 minutos.

12. Un tanque con capacidad de 500 galones contiene originalmente 200 galones de agua con 100 libras de sal en solución. Se introduce dentro del tanque agua que contiene una libra de sal por galón, a la velocidad de 3 gal/min, y se permite que la mezcla fluya hacia afuera del tanque a una velocidad de 2 gal/min. Encuéntrese la cantidad de sal en el tanque para cualquier tiempo (en libras por galón), anterior al instante cuando la solución

principia a exceder la capacidad del tanque. Compárese esta concentración con el límite teórico de la concentración si el tanque tuviese capacidad infinita.

13. Una reacción química de segundo orden involucra la interacción (colisión) de una molécula de una substancia P con otra de una substancia Q para producir una molécula de una nueva substancia X; $P + Q \to X$ es la notación usual. Supóngase que p y q son las concentraciones iniciales de las substancias P y Q, respectivamente, y sea $x(t)$ la concentración de X al tiempo t. Entonces $p - x(t)$ y $q - x(t)$ son las concentraciones de P y Q al tiempo t, y la velocidad a la que ocurre la reacción está descrita por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x),$$

donde α es una constante positiva.

a) Si $x(0) = 0$, encontrar $x(t)$.

b) Si las substancias P y Q son las mismas, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)^2.$$

Si $x(0) = 0$ encontrar $x(t)$.

14. Supóngase que en una cierta reacción química una substancia P se transforma en una X. Sea p la concentración inicial de P y $x(t)$ la concentración de X al tiempo t. Entonces $p - x(t)$ es la concentración de P a t. Supóngase además que la reacción es autocatalítica, esto es, que la reacción se estimula por la misma substancia que se produce. Por lo tanto dx/dt es proporcional a x y a $p - x$, y

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(p - x),$$

donde α es una constante positiva. Si $x(0) = x_0$, encontrar $x(t)$.

15. Supóngase que un cuarto que contiene originalmente 1 200 pies de aire, está libre, originalmente, de monóxido de carbono. Si se principia a fumar un cigarrillo al tiempo $t = 0$, el humo del cual contiene 4% de monóxido de carbono, y este humo se introduce dentro del cuarto con un gasto de 0.1 pie^3/min, y al mismo tiempo se permite que la mezcla de humo y aire se escape del cuarto a la misma velocidad.

a) Encuéntrese una expresión para la concentración $x(t)$ del monóxido de carbono en el cuarto para cualquier tiempo $t > 0$.

b) Si un ser humano se expone a la acción del monóxido de carbono disuelto en el aire en una proporción de 0.00012, puede resultar seriamente afectado. En el caso que hemos presentado, ¿cuánto tiempo t debe transcurrir para que se alcance esta concentración?

16. Considérese un lago de volumen constante V que contiene al tiempo t una cantidad $Q(t)$ de agente contaminador, homogéneamente distribuido en todo el lago con una concentración $c(t)$ donde $c(t) = Q(t)/V$. Supóngase que agua que contiene una concentración k de contaminante entra al lago a una velocidad r, y que sale agua del lago a la misma velocidad. Supóngase que los contaminantes se agregan directamente al lago a una velocidad constante P. Nótese que las suposiciones hechas desprecian un número de factores que pueden, en algunos casos, ser importantes; por ejemplo, el agua agregada o perdida por precipitación, absorción, y evaporación; el efecto estratificador de las diferencias de temperatura en un lago profundo; la tendencia de las irregularidades de la orilla del lago a producir bahías protegidas; y el hecho de que los contaminantes no se depositan homogéneamente en todo el lago, sino que (bien generalmente) se depositan en puntos aislados alrededor de su perímetro. Los resultados mostrados de inmediato deberán examinarse tomando en cuenta que se han despreciado factores como éstos.

a) Si al tiempo $t = 0$ la concentración de contaminante es c_0, encontrar una expresión para la concentración $c(t)$ para cualquier tiempo t. ¿A qué concentración límite se tiende cuando $t \to \infty$?

b) Si se termina la introducción de contaminantes en el lago ($k = 0$ y $P = 0$ para $t > 0$), determínese el intervalo de tiempo T que deberá transcurrir antes de que la concentración de contaminantes se reduzca al 50% de su valor original; al 10% de su valor original.

c) La tabla 2.2 contiene datos† para algunos de los Grandes Lagos. Usando estos datos determínese de la parte *b*) el tiempo T necesario para reducir la contaminación de cada uno de estos lagos al 10% de su valor original.

TABLA 2.2

Lago	V(km^3 × 10^{-3})	r(km^3/año)
Superior	12.2	65.2
Michigan	4.9	158
Erie	0.46	175
Ontario	1.6	209

17. En cada uno de los casos siguientes encuentre la familia de trayectorias ortogonales de la familia dada de curvas. Bosqueje tanto la familia dada como sus trayectorias ortogonales.

a) $xy = c$ *b*) $x^2 + y^2 = cx$

c) $x^2 - xy + y^2 = c^2$ *d*) $2cy + x^2 = c^2, \quad c > 0$

18. Si dos líneas rectas en el plano xy, que tienen pendiente m_1 y m_2 respectivamente, se intersectan en un ángulo θ, mostrar que

$$(\tan \theta)(1 + m_1 m_2) = m_2 - m_1.$$

Usando este hecho, encuéntrese la familia de curvas que intersectan cada una de las familias siguientes en un ángulo de 45°. Dibújense en cada caso ambas familias de curvas.

a) $x - 2y = c$ *b*) $x^2 + y^2 = c^2$

19. Encuéntrense todas las curvas planas tales que la línea tangente en cada punto (x, y) pase a través del punto fijo (a, b).

20. La línea normal a una curva dada en cada punto (x, y) sobre la curva pasa a través del punto (2, 0). Si la curva contiene al punto (2, 3) encuéntrese su ecuación.

† Este problema está basado en el artículo de R.H. Rainey, "Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes," *Science*, 1955 (1967) pp. 1242-1243; la información de la tabla fue tomada de esa fuente.

21. Encuéntrense todas las curvas planas para las que el eje y biseca la parte de la tangente que está entre el punto de tangencia y el eje x.

2.10 MECANICA ELEMENTAL

Algunas de las más importantes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden se encuentran en el campo de la mecánica elemental. En esta sección consideraremos algunos problemas que involucran el movimiento de cuerpos rígidos a lo largo de una línea recta. Supondremos que tales cuerpos obedecen las leyes de movimiento de Newton (1642-1727): *el producto de la masa y la aceleración es igual a la fuerza externa.* En símbolos

$$F = ma, \tag{1}$$

donde F es la fuerza externa, m la masa del cuerpo y a es su aceleración en la dirección de F. Si la masa del cuerpo es constante, entonces la Ec. (1) puede escribirse en la forma

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dP}{dt}, \tag{2}$$

donde v representa la velocidad, y $P = mv$ su impulso lineal.

Hay dos sistemas de unidades de uso común.* En el métrico, o sistema cgs, las unidades básicas son los centímetros (longitud), gramos (masa) y segundos (tiempo). La unidad de fuerza, la dina, está definida por la Ec. (1) como la fuerza requerida para producir una aceleración de 1 cm/seg^2 a una masa de 1 g. Por otra parte, en el sistema inglés las unidades básicas son pies (longitud), libras (fuerza), y segundos (tiempo). La unidad de masa, el slug, se define a través de la Ec. (1) como la masa a la cual una fuerza de 1 libra produce una aceleración de 1 pie/seg^2.

Consideremos ahora un cuerpo que cae libremente en el vacío desde un punto lo suficientemente cercano a la superficie de la Tierra, de tal forma que la única fuerza significativa que actúa sobre el cuerpo es la del campo gravitacional de la Tierra. La Ec. (1) toma entonces la forma

$$w = mg, \tag{3}$$

donde w es el peso del cuerpo y g denota la aceleración debida a la gravedad.

Aun pensando que la masa del cuerpo permanece constante, su peso y la aceleración gravitacional cambian con la distancia que haya desde el centro del campo gravitacional de la Tierra. Al nivel del mar el valor de g ha sido determinado experimentalmente como de 32 pies/s (sistema inglés), o 980 cm/s^2 (sistema métrico). Se acostumbra denotar por g la aceleración gravitacional al *nivel del mar*; por lo tanto g es una constante. En esta inteligencia la Ec. (3) es exacta sólo al nivel del mar.

* El sistema inglés es de uso común sólo en los países de habla inglesa e, inclusive en éstos, está siendo desplazado por el sistema métrico que es, incuestionablemente, más racional. (N. del T.)

La expresión general para el peso de un cuerpo de masa m se obtiene de la ley de los inversos cuadrados de Newton, sobre la atracción gravitacional. Si R es el radio de la Tierra, y x es la altura sobre el nivel del mar, entonces

$$w(x) = \frac{K}{(x+R)^2},$$

donde K es una constante. A $x = 0$ (nivel del mar), $w = mg$; por lo tanto $K = mgR^2$, y

$$w(x) = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}. \tag{4}$$

Desarrollando $(x+R)^{-2}$ en una serie de Taylor alrededor de $x = 0$ se obtiene que

$$w(x) = mg\left(1 - 2\frac{x}{R} + \cdots\right). \tag{5}$$

Se sigue entonces que si los términos de orden de magnitud de x/R pueden despreciarse en comparación con la unidad, entonces la Ec. (4) puede reemplazarse por la aproximación más simple, Ec. (3). Entonces, para movimientos en la vecindad de la superficie de la Tierra, o si no se requiere mucha exactitud, es generalmente suficiente usar la Ec. (3). En otros casos, como problemas que involucren vuelos espaciales, podrá ser necesario usar la Ec. (4), o al menos una aproximación mejor que la Ec. (3).

En muchos casos la fuerza externa F incluirá otros efectos además del peso del cuerpo. Por ejemplo, las fuerzas de fricción debidas a la resistencia ofrecida por el aire u otro medio circundante, pueden ser importantes y se necesite tomarlas en cuenta. Similarmente, los efectos de cambios de masa pueden ser importantes, como es el caso de un vehículo espacial que consume su combustible durante el vuelo.

En los problemas que aquí discutiremos, será de utilidad describir el movimiento del cuerpo con respecto a algún sistema de coordenadas conveniente. Elegiremos siempre el eje x como la línea en la dirección de la cual tiene lugar el movimiento; la dirección positiva del eje x podrá elegirse de una manera arbitraria. Una vez que se especifica la dirección positiva x, un valor positivo de x indica un desplazamiento en esa dirección, un valor positivo de $v = dx/dt$ indica que el cuerpo se mueve en la dirección positiva del eje x, un valor positivo de la fuerza F indica que ésta actúa en la dirección x positiva, y así sucesivamente. Los ejemplos siguientes tratan algunos problemas típicos.

Ejemplo 1. Un objeto de masa m es soltado desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a $|v|$, la magnitud de la velocidad instantánea del objeto.* Suponiendo que la fuerza gravitacional es constante, encuéntrese la posición y velocidad del objeto en cualquier tiempo t.

* En general la resistencia es una función de la velocidad, es decir, de su magnitud. La suposición de una relación lineal es razonable solamente para velocidades comparativamente bajas. Cuando se involucran velocidades altas, puede ser necesario suponer que la resistencia es proporcional a alguna potencia más alta de $|v|$, o aun que está dada por alguna función polinomial de $|v|$.

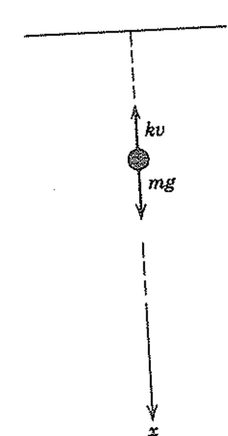


FIGURA 2.6 $v > 0$.

En este caso es conveniente trazar el eje x positivo dirigido hacia abajo, con el origen en la posición inicial del objeto: ver la figura 2.6. Entonces, el peso mg del objeto actúa hacia abajo (positivamente), pero la resistencia $k|v|$, donde k es una constante positiva, actúa para impedir el movimiento. Cuando $v > 0$, la resistencia se hace en la dirección hacia arriba (negativa), y está dada por lo tanto por $-kv$. Cuando $v < 0$, la resistencia actúa hacia abajo y está aún dada por $-kv$. Por lo tanto, en todos los casos la ley de Newton puede escribirse como

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

ó

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \tag{6}$$

La Ec. (6) es una ecuación lineal de primer orden, y tiene el factor integrante $e^{kt/m}$. La solución de la Ec. (6) es

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-kt/m}. \tag{7}$$

La condición inicial $v(0) = 0$, requiere que $c_1 = -mg/k$; de aquí que

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}). \tag{8}$$

Para obtener la posición x del cuerpo reemplazamos v por dx/dt en la Ec. (8); integrando y usando la segunda condición inicial $x(0) = 0$ obtenemos

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}). \tag{9}$$

La posición y velocidad del cuerpo a cualquier tiempo t están dados por las Ecs. (9) y (8) respectivamente.

Es importante enfatizar que cuando $t \to \infty$ en la Ec. (7), la velocidad tiende al valor límite

$$v_l = \frac{mg}{k}. \tag{10}$$

La velocidad límite v_l no depende de las condiciones iniciales, sino sólo de la masa del objeto y el coeficiente de resistencia del medio. Dados ya sea v_l o k, la Ec. (10) nos da una fórmula para calcular la otra. Cuando k tiende a cero, esto es, cuando la resistencia disminuye, la velocidad límite aumenta sin que haya ninguna cota superior para ella.

Ejemplo 2. Un cuerpo de masa constante m es proyectado hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v_0. Suponiendo que no hay resistencia del aire, pero tomando en consideración las variaciones del campo gravitacional de la Tierra con la altura, encontrar la velocidad inicial más pequeña que necesita tener un cuerpo para no regresar a la Tierra. Esta es la llamada *velocidad de escape.*

Tómese el eje x positivo hacia arriba, con el origen sobre la superficie de la Tierra; ver figura 2.7. La única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su peso (hacia abajo) misma que está dada por la Ec. (4). Por lo tanto la ecuación de movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}, \tag{11}$$

y la condición inicial es

$$v(0) = v_0. \tag{12}$$

Ya que la fuerza que aparece en el miembro derecho de la Ec. (11) es una función solamente de x, es conveniente pensar que x, más bien que t, es la variable independiente. Esto requiere que expresemos dv/dt en términos de dv/dx por la regla de la cadena para la derivación; de aquí que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}, \tag{13}$$

y la Ec. (11) se reemplaza por

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}. \tag{14}$$

Separando las variables e integrando obtenemos

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x+R} + c. \tag{15}$$

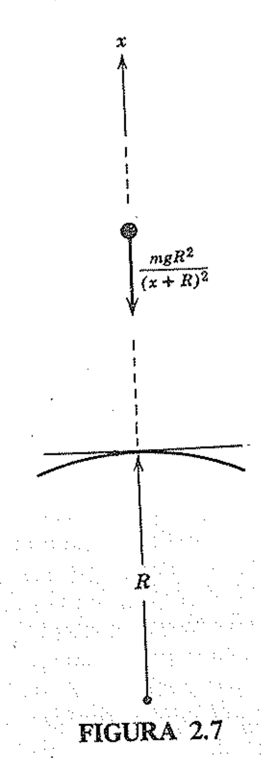


FIGURA 2.7

Ya que $x = 0$ cuando $t = 0$, la condición inicial (12) en $t = 0$ puede reemplazarse por la condición de que $v = v_0$ cuando $x = 0$. Esto requiere que $c = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$; por lo tanto

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R}. \tag{16}$$

La velocidad de escape se encuentra especificando que la velocidad v, dada por la Ec. (16) permanezca positiva para todos los valores (positivos) de x. Esta condición se cumple si $v_0^2 \geq 2gR$. Entonces la velocidad de escape v_e está dada por

$$v_e = (2gR)^{1/2}; \tag{17}$$

la magnitud de v_e es aproximadamente 6.9 mill/s.

Al calcular la velocidad de escape $v_e = (2gR)^{1/2}$, se ha despreciado la resistencia del aire. La velocidad de escape real, incluyendo el efecto de la resistencia del aire, es un poco mayor. Por otra parte, la velocidad de escape efectiva puede reducirse significativamente, si el cuerpo se transporta a una considerable altura sobre el nivel del mar antes de ser disparado; tanto las fuerzas de gravedad como las de fricción se reducen de esta manera. La resistencia del aire, en particular, disminuye bastante rápidamente cuando se aumenta la altura.

PROBLEMAS

1. Un cuerpo de masa constante m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Suponiendo que la atracción gravitacional de la Tierra es constante, y despreciando todas las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo, encontrar:
   a) la máxima altura alcanzada por el cuerpo;
   b) el tiempo en el que se alcanza la máxima altura;
   c) el tiempo que tarda el cuerpo en retornar al punto de partida.

2. Un cuerpo es dejado caer verticalmente hacia abajo, con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese una relación entre la velocidad v y el tiempo t. Encuéntrese la velocidad límite v_l que se alcanza después de un largo tiempo.

3. Un objeto de masa m se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese el intervalo de tiempo que transcurre antes de que la velocidad del objeto alcance el 90% de su valor límite.

4. Un hombre y un bote de motor pesan juntos 320 libras. Si el empuje del motor es equivalente a una fuerza constante de 10 libras en la dirección del movimiento, y si la resistencia del agua al movimiento es numéricamente igual a dos veces la velocidad en pies/seg., y si el bote está inicialmente en reposo, encontrar:
   a) la velocidad del bote al tiempo t;
   b) la velocidad límite.

5. Un cuerpo con masa m es lanzado verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0 es un medio que ofrece una resistencia proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud de la velocidad. Encuéntrese la relación entre la velocidad v y el tiempo t. Encuéntrese también la velocidad límite.

6. Un cuerpo de masa m cae desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Encuéntrese la relación entre la velocidad v y el tiempo t. Encuéntrese la velocidad límite.

7. Un cuerpo de masa m cae en un medio que ofrece una resistencia proporcional a $|v|^r$, donde r es una constante positiva. Suponiendo que la atracción gravitacional es constante, encontrar la velocidad límite del cuerpo.

8. Un cuerpo de masa constante m se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia $k|v|$, donde k es una constante. Despreciando cambios en el campo gravitacional, encontrar:
   a) la máxima altura x_m alcanzada por el cuerpo;
   b) el tiempo t_m en que se alcanza esta máxima altura. Mostrar también que t_m y x_m pueden expresarse como

$$t_m = \frac{v_0}{g}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right],$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right],$$

donde ambas series convergen cuando $kv_0/mg < 1$.

9. Un cuerpo que cae en un fluido relativamente denso, aceite por ejemplo, está actuado por tres fuerzas (ver figura 2.8): Una fuerza resistiva R,



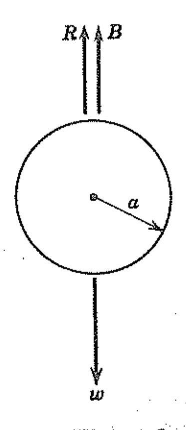


FIGURA 2.8

una fuerza de flotación B, y su peso w debido a la gravedad. La fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado por el objeto. Para un cuerpo esférico de radio a que se mueve lentamente, la fuerza resistiva está dada por la ley de Stokes (1819-1903) $R = 6\pi\mu a|v|$, donde v es la velocidad del cuerpo, y μ es el coeficiente de viscosidad del fluido circundante. Encuéntrese la velocidad límite de una esfera sólida de radio a y densidad ρ cayendo libremente en un medio de densidad ρ' y coeficiente de viscosidad μ.

10. *a*) ¿Cuál es el peso de un cuerpo 1 000 millas sobre la superficie de la Tierra si el cuerpo pesa 100 libras al nivel del mar?

b) El radio de la Luna es aproximadamente 27/100 el de la Tierra, y su densidad promedio es aproximadamente 5/8 de la densidad promedio de la Tierra. Encuéntrese el peso aparente sobre la Luna de un objeto que pesa 100 libras en la superficie de la Tierra.

11. Un cuerpo de masa constante m se lanza verticalmente hacia arriba desde el nivel del mar con una velocidad inicial v_0 que no excede a la velocidad de escape $v_e = (2gR)^{1/2}$. Despreciando la resistencia del aire, pero considerando el cambio de la atracción gravitacional con la altura, encontrar la altitud máxima alcanzada por el cuerpo. Ver el ejemplo 2.

12. Encontrar la velocidad de escape para un cuerpo proyectado hacia arriba con una velocidad inicial v_0 desde el punto $x_0 = \xi R$ sobre la superficie de la Tierra, donde R es el radio de la Tierra y ξ es una constante. Despreciar la resistencia del aire. Encontrar la altura inicial a la que el cuerpo debe ser lanzado para reducir la velocidad de escape a un 85% de su valor en la superficie de la Tierra.

*2.11 EL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

En esta sección discutiremos la prueba del Teorema 2.2, el Teorema fundamental de existencia y unicidad para problemas de valores a la frontera de primer orden. Este Teorema establece que bajo ciertas condiciones sobre $f(x, y)$, el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \tag{1a}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{1b}$$

tiene una solución única en algún intervalo que contenga el punto x_0.

En algunos casos (por ejemplo, si la ecuación diferencial es lineal), la existencia de una solución del problema de valores iniciales (1) puede establecerse directamente resolviendo realmente el problema y exhibiendo una fórmula para la solución. Sin embargo, este enfoque no es simple en general, porque no hay un método para resolver la Ec. (1a) que se aplique en todos los casos. Por lo tanto, para el caso general es necesario adoptar un ataque indirecto que establezca la existencia de una solución de las Ecs. (1) aunque usualmente no nos dé los métodos para encontrarla. El meollo de este método es la construcción de una secuencia de funciones que converge a una función límite que satisface el problema de valores iniciales, aunque los miembros de la secuencia no lo hagan individualmente. Como regla, es imposible calcular explícitamente más de unos pocos miembros de la secuencia; por lo tanto la función límite puede encontrarse explícitamente sólo en raros casos, y de aquí que este método no nos dé un método útil para realmente resolver problemas de valores iniciales. Sin embargo, bajo las restricciones sobre $f(x, y)$ establecidas en el Teorema 2.2, es posible mostrar que la secuencia en cuestión converge y que la función límite tiene las propiedades deseadas. El argumento es bastante intrincado y depende, en parte, de técnicas y resultados que se encuentran por primera vez en un curso de cálculo avanzado. Consecuentemente, no insistiremos aquí en los detalles de la prueba pero indicaremos, no obstante, cuáles son sus principales características y apuntaremos algunas de las dificultades que involucra.

Primero de todo, notaremos que es suficiente considerar el problema en el que el punto inicial (x_0, y_0) es el origen; esto es, el problema

$$y' = f(x, y), \tag{2a}$$

$$y(0) = 0. \tag{2b}$$

Si se da algún otro punto inicial, entonces siempre podemos hacer un cambio preliminar de variables, correspondiendo a una traslación de los ejes coordenados, que coloque al punto (x_0, y_0) en el origen. Específicamente, introduciremos nuevas variables dependientes e independientes w y s, respectivamente, que están definidas por las ecuaciones

$$w = y - y_0, \qquad s = x - x_0; \tag{3}$$

ver también la figura 2.9. Pensando a w como una función de s, tenemos por la regla de la cadena

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}(y - y_0)\frac{d}{ds}(s + x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Denotando $f(x, y) = f(s + x_0, w + y_0)$ por $F(s, w)$, el problema de valores iniciales (1) se convierte en la forma

$$w'(s) = F[s, w(s)], \tag{4a}$$

$$w(0) = 0. \tag{4b}$$

Excepto por los nombres de las variables, las Ecs. (4) son las mismas que las Ecs. (2). De aquí en adelante, consideraremos el problema ligeramente más simple (2) en lugar del problema original (1).

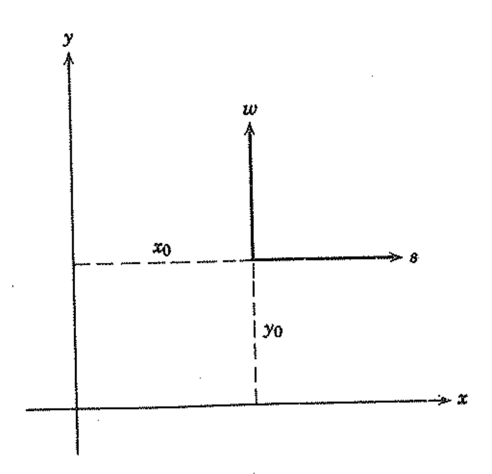


FIGURA 2.9

El Teorema de existencia y unicidad puede ahora establecerse de la forma siguiente.

Teorema 2.4. Si f y ∂f/∂y son continuas en un rectángulo R: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, *entonces hay algún intervalo* $|x| \leq h \leq a$ *en el cual existe una solución única* $y = \phi(x)$ *del problema (2) de valores iniciales.*

$$y' = f(x, y), \qquad y(0) = 0.$$

Para probar este Teorema es necesario transformar el problema de valores iniciales (2) en una forma más conveniente. Si suponemos temporalmente que hay una función $y = \phi(x)$ que satisface el problema de valores iniciales, entonces $f[x, \phi(x)]$ es una función continua de x solamente. De aquí que podemos integrar la Ec. (2a) desde el punto inicial $x = 0$ hasta un valor arbitrario de x, obteniendo

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt, \tag{5}$$

donde se ha usado la Ec. (2b) para eliminar $\phi(0)$.

Ya que la Ec. (5) contiene una integral de la función desconocida ϕ, se le llama una *ecuación integral.* Esta ecuación integral no es una fórmula para la solución del problema de valores iniciales, pero nos da otra relación que es satisfecha por cualquier solución de las Ecs. (2). Inversamente, supóngase que hay una función continua $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación integral (5); entonces esta función satisface también el problema de valores iniciales (2). Para mostrar esto, substituimos primero cero por x en la Ec. (5), obteniendo por lo tanto la Ec. (2b). Además, ya que el integrando en la Ec. (5) es continuo, se sigue del Teorema fundamental del cálculo, que $\phi'(x) = f[x, \phi(x)]$. Por lo tanto, el problema de valores iniciales y la ecuación integral son equivalentes en el sentido de que cualquier solución de uno es también

solución del otro. Es más conveniente mostrar que hay una solución única de la ecuación integral en un cierto intervalo $|x| \leq h$. La misma conclusión vale entonces para el problema de valores iniciales.

Un método de mostrar que la ecuación integral (5) tiene una solución única se conoce con el nombre de *método de aproximaciones sucesivas*, o método de Picard (1856-1941). Para usar este método principiaremos por elegir una función inicial ϕ_0, ya sea arbitraria o aproximada en alguna forma a la solución del problema de valores iniciales. La elección más simple consiste en definir ϕ_0 tal que

$$\phi_0(x) = 0; \tag{6}$$

entonces ϕ_0 satisface al menos la condición inicial (2b) aunque presumiblemente no la ecuación diferencial (2a). La siguiente aproximación ϕ_1 se obtiene substituyendo $\phi_0(t)$ por $\phi(t)$ en el miembro derecho de la Ec. (5), y llamando al resultado de esta operación $\phi_1(x)$. De aquí que

$$\phi_1(x) = \int_0^x f[t, \phi_0(t)]\, dt. \tag{7}$$

Similarmente, ϕ_2 se obtiene de ϕ_1:

$$\phi_2(x) = \int_0^x f[t, \phi_1(t)]\, dt, \tag{8}$$

y en general

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)]\, dt. \tag{9}$$

En esta forma generamos la secuencia de funciones $\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$. Cada miembro de la secuencia satisface la condición inicial (2b), pero en general ninguna satisface la ecuación diferencial. Sin embargo si en algún paso, digamos para $n = k$, encontramos que $\phi_{k+1}(x) = \phi_k(x)$ entonces se sigue que ϕ_k es una solución de la ecuación integral (5). Entonces ϕ_k es también una solución del problema de valores iniciales (2), y la secuencia termina en ese punto. En general esto no ocurre, y es necesario considerar la secuencia infinita completa.

Para establecer el Teorema 2.4 hay que dar respuesta a cuatro cuestiones principales.

1. ¿Existen todos los miembros de la secuencia $\{\phi_n\}$, o puede romperse el proceso en algún paso?
2. ¿Converge la secuencia?
3. ¿Cuáles son las propiedades de la función límite; en particular, esta función satisface la ecuación integral (5) y por lo tanto el problema de valores iniciales (2)?
4. ¿Es la única solución, o puede haber otras?

Mostraremos primero cómo se pueden contestar estas preguntas en un ejemplo específico y relativamente simple, hecho esto comentaremos algunas de las dificultades que pueden presentarse en el caso general.

Ejemplo. Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = 2x(y + 1), \qquad y(0) = 0. \tag{10}$$

Para resolver este problema por el método de aproximaciones sucesivas notaremos primero que si $y = \phi(x)$, entonces la correspondiente ecuación integral es

$$\phi(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi(t)]\, dt. \tag{11}$$

Si la aproximación inicial es $\phi_0(x) = 0$, se sigue que

$$\phi_1(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_0(t)]\, dt = \int_0^x 2t\, dt = x^2. \tag{12}$$

Similarmente

$$\phi_2(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_1(t)]\, dt = \int_0^x 2t[1 + t^2]\, dt$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{2}, \tag{13}$$

y

$$\phi_3(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_2(t)]\, dt = \int_0^x 2t\left[1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right] dt$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 3}. \tag{14}$$

Las Ecs. (12), (13) y (14) sugieren que

$$\phi_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} \tag{15}$$

para cada $n \geq 1$, y este resultado puede establecerse por inducción matemática. Claramente, la Ec. (15) es verdadera para $n = 1$, y ahora tenemos que mostrar que si es válida para $n = k$ lo es también para $n = k + 1$. Tenemos

$$\phi_{k+1}(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_k(t)]\, dt$$

$$= \int_0^x 2t\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \cdots + \frac{t^{2k}}{k!}\right) dt$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!}, \tag{16}$$

y de esta manera está completa la prueba inductiva.

Es claro de la Ec. (15) que $\phi_n(x)$ es la enésima suma parcial en la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k!\,; \tag{17}$$

de aquí que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ exista si y sólo si la serie (17) converge. Aplicando la prueba de la razón, vemos que para cada x

$$\left|\frac{x^{2k+2}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{x^{2k}}\right| = \frac{x^2}{k+1} \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty; \tag{18}$$

por lo tanto la serie (17) converge para toda x, y su suma $\phi(x)$ es el límite* de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$. Además, ya que la serie (17) es una serie de Taylor, puede diferenciarse o integrarse término a término en tanto que x permanezca dentro del intervalo de convergencia, que en este caso es el eje x completo. Por lo tanto podemos verificar por cálculo directo que $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k!$ es una solución de la ecuación integral (11). Alternativamente, substituyendo $\phi(x)$ por y en la Ec. (10) podemos verificar que esta función satisface también el problema de valores iniciales.

Finalmente, para tratar con el asunto de la unicidad, vamos a suponer que el problema de valores iniciales tiene otra solución ψ diferente de ϕ. Mostraremos que esto lleva a una contradicción. Ya que ϕ y ψ satisfacen ambas la ecuación integral (11), tenemos por resta que

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x 2t[\phi(t) - \psi(t)]\, dt.$$

Tomando valores absolutos en ambos lados tenemos que, si $x > 0$

$$|\phi(x) - \psi(x)| = \left|\int_0^x 2t[\phi(t) - \psi(t)]\, dt\right| \leq \int_0^x 2t\, |\phi(t) - \psi(t)|\, dt.$$

Si restringimos x a estar en el intervalo $0 \leq x \leq A/2$, donde A es arbitrario, entonces $2t \leq A$, y

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq A \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\, dt. \tag{19}$$

Es conveniente en este punto introducir la función U definida por

$$U(x) = \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\, dt. \tag{20}$$

Se sigue inmediatamente entonces que

$$U(0) = 0, \tag{21}$$

$$U(x) \geq 0, \quad \text{para} \quad x \geq 0. \tag{22}$$

Además, U es diferenciable, y $U'(x) = |\phi(x) - \psi(x)|$. De aquí que, por la Ec. (19)

$$U'(x) - AU(x) \leq 0. \tag{23}$$

Multiplicando la Ec. (23) por la cantidad positiva e^{-Ax} obtenemos

$$[e^{-Ax}U(x)]' \leq 0. \tag{24}$$

* En este caso es posible identificar ϕ en términos de funciones elementales, $\phi(x) = e^{x^2} - 1$. Sin embargo, esto es irrelevante para la discusión de la existencia y la unicidad.

Entonces, integrando la Ec. (24) de cero a x y usando la Ec. (21), nos queda que

$$e^{-Ax}U(x) \leq 0 \qquad \text{para} \qquad x \geq 0.$$

De aquí que $U(x) \leq 0$ para $x \geq 0$, y en conjunción con la Ec. (22) esto requiere que $U(x) = 0$ para cada $x \geq 0$. Entonces $U'(x) \equiv 0$, y por lo tanto $\psi(x) \equiv \phi(x)$, lo que contradice la hipótesis original. Consecuentemente, no puede haber dos soluciones diferentes del problema de valores iniciales para $x \geq 0$. Una ligera modificación de este argumento conduce a la misma conclusión para $x \leq 0$.

Volviendo ahora al problema general de resolver la ecuación integral (5), consideremos brevemente cada una de las cuestiones antes planteadas.

1. ¿Existen todos los miembros de la secuencia $\{\phi_n\}$? En el ejemplo f y $\partial f/\partial y$ fueron continuas en todo el plano xy, y cada miembro de la secuencia podía calcularse explícitamente. En contraste, en el caso general se supone que f y $\partial f/\partial y$ son continuos solamente en el rectángulo R: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$; ver la figura 2.10. Más aún, los miembros de la secuencia no pueden, por regla general, determinarse explícitamente. El peligro está en que en algún paso, digamos para $n = k$, la gráfica de $y = \phi_k(x)$ puede contener puntos que estén fuera del rectángulo R. Entonces en el paso siguiente, en el cálculo de $\phi_{k+1}(x)$ sería necesario calcular $f(x, y)$ en puntos donde no se sabe que sea continuo o aún que exista. Por lo tanto, el cálculo de $\phi_{k+1}(x)$ puede ser imposible.

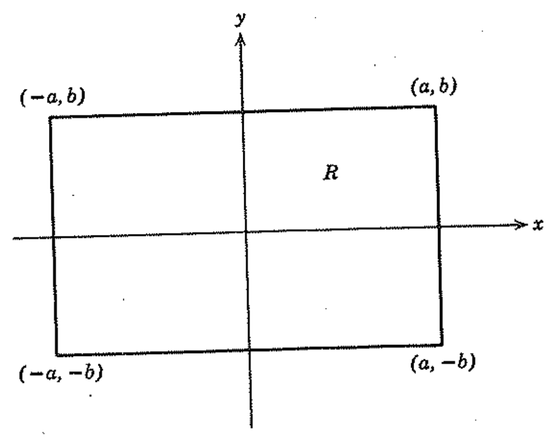


FIGURA 2.10

Para evitar este peligro puede ser necesario restringir x a un pequeño intervalo menor que $|x| \leq a$. Para encontrar ese intervalo es necesario hacer uso del hecho que una función continua sobre una región cerrada está acotada. De aquí, f está acotada sobre R; entonces existe un número positivo M tal que

$$|f(x, y)| \leq M, \qquad (x, y) \text{ en } R. \tag{25}$$

Hemos mencionado antes que

$$\phi_n(0) = 0$$

para cada n. Ya que $f[x, \phi_k(x)] = \phi'_{k+1}(x)$, la pendiente de la gráfica de la ecuación $y = \phi_{k+1}(x)$ no puede exceder a M en valor absoluto. Ya que esta gráfica contiene al punto (0, 0), debe estar en la región sombreada y aguzada que se muestra en la figura 2.11. De aquí que el punto $[x, \phi_{k+1}(x)]$ permanezca en R al menos en tanto que R contenga la región sombreada, que es para $|x| \leq b/M$. De aquí en adelante consideraremos solamente el rectángulo D: $|x| \leq h$, $|y| \leq b$, donde h es igual ya sea a a o a b/M, dependiendo cuál es menor. Con esta restricción todos los miembros de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$ existen. Nótese que si $b/M < a$, entonces puede obtenerse un valor grande de h encontrando una cota mejor para $|f(x, y)|$, siempre y cuando M no sea igual al valor máximo de $|f(x, y)|$.

2. ¿Converge la secuencia $\{\phi_n(x)\}$? Como un ejemplo podemos identificar $\phi_n(x) = \phi_1(x) + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] + \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$ como la enésima suma parcial de la serie

$$\phi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)]. \tag{26}$$

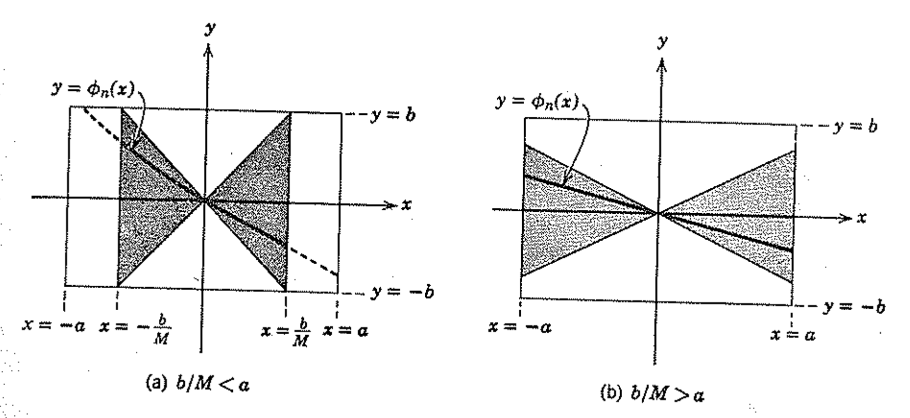


FIGURA 2.11

La convergencia de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$ se establece mostrando que la serie (26) converge. Para hacer esto es necesario estimar la magnitud $|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)|$ del término general. El argumento por medio del cual se hace esto se indica en los problemas 3 a 6 y será omitido aquí. Suponiendo que la secuencia converge, denotaremos la función límite por ϕ, de tal forma que

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x). \tag{27}$$

3. ¿Cuáles son las propiedades de la función límite ϕ? En primer lugar, deseamos saber si ϕ es continua. Esto no es, sin embargo, una consecuencia

necesaria de la convergencia de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$, aun cuando cada miembro de la secuencia sea él mismo continuo. Hay muchos casos en los cuales una secuencia de funciones continuas converge a un límite discontinuo. Un ejemplo simple de este fenómeno está dado en el problema 1. Una forma de mostrar que ϕ es continua consiste en mostrar no solamente que la secuencia $\{\phi_n\}$ converge, sino que lo hace de cierta manera, conocida como convergencia uniforme. No tocaremos aquí esta cuestión sino que sólo notaremos que el argumento a que se refiere el párrafo (2) es suficiente para establecer la convergencia uniforme de la secuencia $\{\phi_n\}$ y de aquí la continuidad de la función límite ϕ en el intervalo $|x| \leq h$.

Volvamos ahora a la Ec. (9)

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)]\, dt.$$

Permitiendo que n tienda a ∞ por ambos lados, obtenemos

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^x f[t, \phi_n(t)]\, dt. \tag{28}$$

Nos gustaría intercambiar las operaciones de integración y tomar el límite en el miembro derecho de la Ec. (28), para obtener

$$\phi(x) = \int_0^x \lim_{n\to\infty} f[t, \phi_n(t)]\, dt. \tag{29}$$

En general, tal intercambio no es permisible (ver problema 2, por ejemplo), pero una vez más el hecho de que la secuencia $\{\phi_n(x)\}$ no solamente converge, sino que además lo hace uniformemente, viene al rescate y nos permite tomar la operación del límite dentro del signo de integral. En seguida deseamos tomar el límite dentro de la función f, lo cual nos daría

$$\phi(x) = \int_0^x f\left[t, \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)\right] dt \tag{30}$$

y de aquí que

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{31}$$

La afirmación de que $\lim_{n\to\infty} f[t, \phi_n(t)] = f[t, \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)]$ se sigue de la hipótesis de que f es continua en su segunda variable. Entonces la Ec. (31) es válida y la función ϕ satisface la ecuación integral (5). Por lo tanto, ϕ es también una solución del problema de valores iniciales (2).

4. ¿Puede haber otras soluciones de la ecuación integral (5) además de $y = \phi(x)$? Para mostrar la unicidad de la solución $y = \phi(x)$ podemos proceder casi completamente como en el ejemplo. Primero suponga lo contrario, eso es la existencia de otra solución $y = \psi(x)$. Es entonces posible mostrar (ver problema 7) que la diferencia $\phi(x) - \psi(x)$ satisface la desigualdad

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq A \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\, dt \tag{32}$$

para $0 \leq x \leq h$ y para un número positivo adecuado A. Desde aquí el argumento es idéntico al dado en el ejemplo y concluimos que no existe otra solución al problema de valores iniciales (2) que la obtenida por el método de aproximaciones sucesivas.

PROBLEMAS

1. Dado $\phi_n(x) = x^n$ para $0 \leq x \leq 1$, mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Este ejemplo muestra que una secuencia de funciones continuas puede converger a una función límite que es discontinua.

2. Considérese la secuencia $\phi_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$ $0 \leq x \leq 1$.

a) Mostrar que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0$ para cada x en $0 \leq x \leq 1$ y de aquí que

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)\, dx = 0.$$

b) Mostrar que $\int_0^1 2nxe^{-nx^2}\, dx = 1 - e^{-n}$ y de aquí que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 2nxe^{-nx^2}\, dx = 1.$$

Este ejemplo muestra que no es necesariamente cierto que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)\, dx$$

aun cuando el $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ exista y sea continuo

En los problemas 3 a 6 indicamos cómo probar que la secuencia $\{\phi_n(x)\}$, definida por las Ecs. (6) a (9), converge.

3. Si $\partial f/\partial y$ es continua en el rectángulo D, mostrar que hay una constante positiva K tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

donde (x, y_1) y (x, y_2) son dos puntos cualesquiera en D que tienen la misma coordenada x.

Sugerencia: Use el Teorema del valor medio para derivadas parciales, y elija K de tal forma que sea el valor máximo de $|\partial f/\partial y|$ en D.

4. Si $\phi_{n-1}(x)$ y $\phi_n(x)$ son miembros de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$, use el resultado del problema 3 para mostrar que

$$|f[x, \phi_n(x)] - f[x, \phi_{n-1}(x)]| \leq K|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|.$$

5. *a*) Mostrar que si $|x| \leq h$, entonces

$$|\phi_1(x)| \leq M|x|$$

donde M se elige de tal forma que $|f(x, y)| \leq M$ para (x, y) en D.

b) Use los resultados del problema 4 y la parte *a*) del problema 5 para mostrar que

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \leq \frac{MK|x|^2}{2}.$$

c) Mostrar, por inducción matemática que

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}|x|^n}{n!} \leq \frac{MK^{n-1}h^n}{n!}.$$

6. Nótese que

$$\phi_n(x) = \phi_1(x) + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] + \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)].$$

a) Mostrar que

$$|\phi_n(x)| \leq |\phi_1(x)| + |\phi_2(x) - \phi_1(x)| + \cdots + |\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|.$$

b) Usar los resultados del problema 5 para mostrar que

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{M}{K}\left[Kh + \frac{(Kh)^2}{2!} + \cdots + \frac{(Kh)^n}{n!}\right]$$

c) Mostrar que la suma en la parte *b*) converge cuando $n \to \infty$, y de aquí mostrar que la suma en la parte *a*) converge también cuando $n \to \infty$. Concluir por lo tanto que la secuencia $\{\phi_n(x)\}$ converge, ya que es la secuencia de sumas parciales de una serie infinita convergente.

7. En este problema tratamos con el asunto de la unicidad de la solución de la ecuación integral (5),

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt.$$

a) Supóngase que ϕ y ψ son dos soluciones de la Ec. (5). Mostrar que

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x \{f[t, \phi(t)] - f[t, \psi(t)]\}\, dt.$$

b) Mostrar que

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \int_0^x |f[t, \phi(t)] - f[t, \psi(t)]|\, dt.$$

c) Use el resultado del problema 3 para mostrar que

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq K \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\, dt,$$

donde K es una cota superior para $|\partial f/\partial y|$ en D. Esta es la misma que la Ec. (32), y el resto de la prueba puede construirse como se indica en el texto.

*2.12 EL TEOREMA DE EXISTENCIA DESDE UN PUNTO DE VISTA MAS MODERNO

El Teorema de existencia y unicidad y el método de prueba antes discutido se remontan al siglo pasado. Es muy conveniente considerar este Teorema brevemente desde un punto de vista más moderno que ha ido aumentando su valor en los últimos años. Para introducir la idea principal en una forma más simple y familiar, revisaremos primero ciertas propiedades de las funciones continuas.

Lema (Propiedad del Valor Intermedio). Si la función f es continua para $a \leq x \leq b$, y $f(a) \geq 0$, $f(b) \leq 0$, entonces hay al menos un punto ξ en $a \leq x \leq b$ tal que $f(\xi) = 0$.

En otras palabras, una función continua no puede cambiar de signo sin pasar a través de cero al menos una vez; ver la figura 2.12. Puede haber por supuesto más de un punto ξ donde $f(\xi)$ es cero. Puesto en términos geométricos el Lema parece obvio, pero su prueba analítica descansa finalmente sobre una propiedad profunda (la propiedad de completitud) del sistema de números reales, que aquí omitiremos verla. El Corolario siguiente es una consecuencia inmediata de la propiedad del valor intermedio.

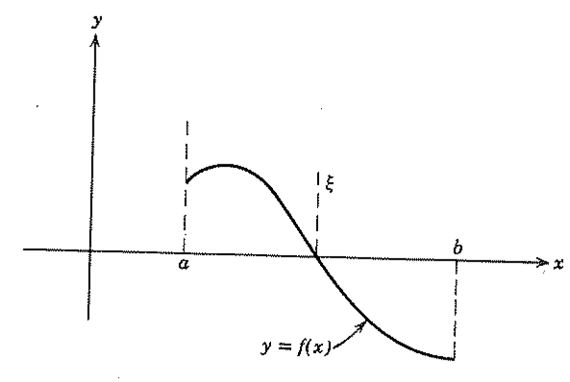


FIGURA 2.12

Corolario 1. Si la función g es continua para $a \leq x \leq b$ y si $a \leq g(x) \leq b$, entonces hay al menos un punto ξ en $a \leq x \leq b$ tal que $g(\xi) = \xi$.

Para establecer el Corolario sea $f(x) = g(x) - x$; entonces f satisface las condiciones del Lema. Hay entonces al menos un punto ξ donde $f(\xi) = 0$, y de aquí que $g(\xi) = \xi$.

Es interesante dar una interpretación geométrica de este Corolario (ver figura 2.13). La gráfica de la ecuación $y = g(x)$ está en la banda $a \leq y \leq b$, y por lo tanto debe pasar de un lado a otro de la línea $y = x$. Las coordenadas del punto de intersección dan el valor de ξ mencionado en el Corolario. Si pensamos a la función g como un mapeo o una transformación del intervalo $[a, b]$ sobre el eje x, en el intervalo $[a, b]$ sobre el eje y, entonces el punto ξ

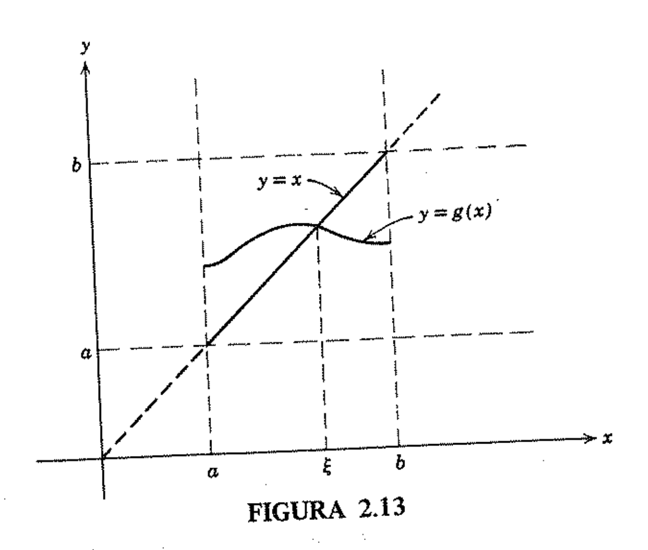


FIGURA 2.13

no se transforma, o se mapea en sí mismo. Consecuentemente, ξ es llamado un *punto fijo* de la transformación definida por g. En estos términos el Corolario puede reestablecerse en la forma siguiente.

Corolario 2. Si g es una función continua (transformación) y mapea el intervalo cerrado $[a, b]$ en sí mismo, entonces g tiene al menos un punto fijo.

La idea de un punto fijo de una transformación puede extenderse a transformaciones más generales que las funciones continuas de una sola variable real. Recuérdese que en la última sección mostramos que el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \qquad y(0) = 0 \tag{1}$$

es equivalente a la ecuación integral

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{2}$$

Ahora el operador indicado por el miembro derecho de la Ec. (2) puede aplicarse a cualquier función continua ϕ, ya sea que esta función sea una solución del problema de valores iniciales (1) o no. Vamos a denotar este operador por T; el resultado de esta operación es una nueva función $T\phi$, cuyo valor en un punto x está dado por

$$(T\phi)(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{3}$$

Hablamos de T como un operador o transformación que actúa sobre un cierto conjunto de funciones como su dominio y produce otro conjunto de funciones como su rango. Para preservar la analogía geométrica nos referiremos a esos conjuntos de funciones como "espacios" de funciones o

"espacios funcionales", y a las funciones individuales como "puntos" en el "espacio".

La ecuación integral (2), cuando se reestablece en términos del operador T definido por la Ec. (3), toma la forma

$$\phi(x) = (T\phi)(x) \qquad \text{ó} \qquad \phi = T\phi. \tag{4}$$

Por lo tanto el problema de resolver la ecuación integral es exactamente el mismo de encontrar los puntos fijos de T.

El Corolario 2 puede extenderse para tratar con operadores más generales tales como T. Es necesario primero de todo desarrollar el concepto de continuidad con respecto a tales operadores. Entonces debemos identificar un conjunto adecuado de funciones que sirvan como el dominio del operador. Una vez que esto se ha hecho, es posible mostrar que si una transformación continua mapea un conjunto adecuado de funciones en sí mismo, entonces hay al menos una función que permanece invariante y es por lo tanto un punto fijo del operador. Si el operador es el definido por la Ec. (3), entonces este punto fijo constituye una solución del problema de valores iniciales (2). De aquí que pueda considerarse un Teorema de existencia para el problema de valores iniciales como una generalización de gran alcance de la propiedad simple de funciones continuas establecida en el Corolario 1.

REFERENCIAS

Una discusión más completa de la prueba del Teorema fundamental de existencia y unicidad, puede encontrarse en muchos libros más avanzados de ecuaciones diferenciales. Dos que son razonablemente accesibles para lectores con conocimientos elementales son:

Coddington, E.A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Brauer, F. y Nohel, J., *Ordinary Differential Equations*, Benjamin, Nueva York, 1967.

Un catálogo útil de ecuaciones diferenciales y sus soluciones está contenido en el libro siguiente:

Kamke, E., *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea, Nueva York, 1948.

Aunque este texto está en alemán, se necesita muy poco conocimiento de este idioma para consultar la lista de problemas resueltos.

Capítulo 3

Ecuaciones lineales de segundo orden

3.1 INTRODUCCION

La ecuación diferencial general de segundo orden es una ecuación de la forma

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{1}$$

La teoría asociada con tales ecuaciones es bastante complicada. Principiaremos por lo tanto restringiendo nuestra atención a ecuaciones que puedan resolverse para y'', esto es, ecuaciones que pueden escribirse en la forma

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{2}$$

Para la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$, encontramos que hay una solución que contiene una constante arbitraria. Ya que una ecuación de segundo orden involucra una segunda derivada, y por lo tanto, burdamente hablando, se requieren dos integraciones para encontrar una solución, es natural esperar encontrar soluciones de la Ec. (2), que contengan dos constantes arbitrarias. Por ejemplo, la solución de

$$y'' = g(x) \tag{3}$$

es

$$y = \phi(x) = c_1 + c_2 x + \int^x \left[\int^t g(s)\, ds \right] dt, \tag{4}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Para una ecuación de primer orden fue suficiente especificar el valor de la solución en un punto para poder determinar una curva integral única. Ya que esperamos que la solución de una ecuación de segundo orden contenga dos constantes arbitrarias, será necesario, para obtener una solución única, especificar dos condiciones, por ejemplo, el valor de la solución y_0 y su derivada y'_0 en un punto x_0. Estas condiciones son llamadas *condiciones iniciales.* Entonces, para determinar unívocamente

una curva integral de una ecuación de segundo orden, es necesario especificar no solamente un punto a través del cual pasa, sino también la pendiente de la curva en ese punto.

Para asegurar la existencia de una solución de la Ec. (2) que satisfaga las condiciones iniciales prescritas, es necesario postular ciertas propiedades de la función f. La situación está gobernada por el siguiente Teorema de existencia y unicidad.

Teorema 3.1. Si las funciones f, f_y y f_v son continuas en una región abierta R del espacio tridimensional xyv, y si el punto (x_0, y_0, y'_0) está en R, entonces en algún intervalo alrededor de x_0, existe una solución única $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial (2)

$$y'' = f(x, y, y'),$$

que satisface las condiciones iniciales prescritas

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0. \tag{5}$$

La prueba de este Teorema es similar al del correspondiente para las ecuaciones de primer orden dado en la sección 2.11. Usualmente al llevar a cabo la prueba, es conveniente reemplazar la ecuación de segundo orden por un sistema equivalente de dos ecuaciones de primer orden (ver capítulo 6). Se pueden encontrar pruebas de esto en libros más avanzados, por ejemplo, Coddington [capítulo 6] o Ince [capítulo 3].

Aun pensando que la existencia de una solución de la Ec. (2) está garantizada bajo las condiciones del Teorema 3.1, puede no ser posible determinar una expresión analítica conveniente para la solución, a menos que f sea una función suficientemente simple. Justamente como en el caso de las ecuaciones de primer orden, distinguimos entre ecuaciones de segundo orden lineales y no lineales. La *ecuación general lineal de segundo orden* es de la forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x), \tag{6}$$

donde P, Q, R y G son funciones dadas.

Un ejemplo simple pero importante de una ecuación diferencial lineal de segundo orden es la ecuación que gobierna el movimiento de una masa acoplada a un resorte

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = F(t), \tag{7}$$

donde m, c y k son constantes y F es una función prescrita. Esta ecuación está deducida en la sección 3.7. Otros ejemplos son la ecuación de Legendre*

* A.M. Legendre (1752-1833) fue un distinguido matemático francés que trabajó principalmente en los campos de las funciones elípticas y la teoría de los números. Las funciones de Legendre, que son soluciones de la ecuación diferencial que lleva su nombre, surgieron de sus estudios sobre la atracción de esferoides.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \tag{8}$$

de orden α, y la ecuación de Bessel* de orden ν,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{9}$$

donde α y ν son constantes, a menudo enteros. La ecuación de Bessel surge en muchas diferentes situaciones físicas, particularmente en problemas que involucran geometría circular, tal como la determinación de la distribución de temperaturas en un plato circular. La ecuación de Legendre ocurre a menudo en situaciones físicas que involucran geometría esférica.

Si la Ec. (2) no es de la forma (6) se dice que es no lineal. Aunque la teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales es bastante difícil, hay dos casos especiales donde es posible simplificar la ecuación general de segundo orden no lineal (2). Esto ocurre cuando ya sea la variable x o la variable y, han desaparecido de $f(x, y, y')$; esto es, cuando la Ec. (2) es de la forma

$$y'' = f(x, y') \tag{10}$$

ó

$$y'' = f(y, y'). \tag{11}$$

En estos casos es siempre posible reducir la Ec. (10) o la Ec. (11) a una ecuación de primer orden para $v = y'$. Siempre y cuando que la ecuación de primer orden sea de uno de los tipos discutidos en el capítulo 2, podemos resolver esta ecuación para v, y una integración más nos dará la solución de la ecuación diferencial original. Esto está discutido en los problemas 1, 2 y 3 al final de esta sección.

El resto de este capítulo y el siguiente, está dedicado a métodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales. Aunque no hay una fórmula específica para la solución de la Ec. (6), como sucedió en el caso de la ecuación lineal de primer orden, hay una teoría matemática extensa para las ecuaciones lineales de segundo orden. En la discusión siguiente supondremos, a menos de que otra cosa se establezca, que las funciones P, Q, R y G en la Ec. (6), son continuas sobre algún intervalo $\alpha < x < \beta$ (en algunos problemas el intervalo puede ser ilimitado, esto es, α puede ser $-\infty$ y/o β puede ser $+\infty$), y que, además, que la función P no es cero en ninguna parte del intervalo. En este caso podemos dividir la Ec. (6) por $P(x)$ y obtener una ecuación de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x). \tag{12}$$

Nótese que las suposiciones anteriores son llenadas por la Ec. (7) sobre $-\infty < x < \infty$; para la ecuación de Legendre sobre los intervalos $-1 < x < 1$, o $x < -1$; y para la ecuación de Bessel sobre cualquier intervalo que no contenga al origen.

*F.W. Bessel (1784-1846) fue un matemático alemán que hizo contribuciones fundamentales en los campos de la astronomía, la geodesia y la mecánica celeste. Fue la primera persona en hacer un análisis sistemático de las soluciones (conocidas como funciones de Bessel) de la ecuación que lleva su nombre.

Si escribimos la Ec. (12) en la forma de la Ec. (2), la función f está dada por

$$f(x, y, y') = -p(x)y' - q(x)y + g(x). \tag{13}$$

Ya que $\partial f(x, y, y')/\partial y = -q(x)$ y $\partial f(x, y, y')/\partial y' = -p(x)$ son continuas, se sigue del Teorema 3.1 la existencia y unicidad de una solución de la Ec. (12) que satisfaga las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $\alpha < x_0 < \beta$, en algún intervalo alrededor de x_0. Sin embargo, justamente como para las ecuaciones de primer orden, el Teorema de existencia y unicidad para las ecuaciones de segundo orden puede establecerse más fuertemente para las ecuaciones lineales que para las no lineales.

Teorema 3.2. Si las funciones p, q y g son continuas sobre el intervalo abierto $\alpha < x < \beta$, *existe entonces una función y sólo una* $y = \phi(x)$ *que satisface la ecuación diferencial* (12)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

sobre el intervalo completo $\alpha < x < \beta$, *y las condiciones iniciales prescritas* (5)

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0,$$

en un punto particular x_0 *en el intervalo.*

Para ilustrar un uso de este Teorema consideremos los siguientes ejemplos simples.

Ejemplo 1. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0,$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Es fácil verificar que sen x y cos x son soluciones de la ecuación diferencial. Además $y =$ sen x, satisface $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 3.2, $y =$ sen x es la solución única del problema.

Ejemplo 2. ¿Cuál es la única solución de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \alpha < x < \beta,$$

que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, donde x_0 es un punto en el intervalo $\alpha < x < \beta$? Ya que $y = 0$ satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales, es la única solución.

En los Teoremas 3.1 y 3.2 es importante notar que las condiciones iniciales que determinan una solución única de la Ec. (2) o la Ec. (12), son condiciones sobre el valor de la solución y su primera derivada en un punto fijo en el intervalo. En contraste, la cuestión de encontrar una solución de por ejemplo la Ec. (12), satisfaciendo condiciones de la forma $y(x_0) = A$, $y(x_1) = B$ donde x_0 y x_1 son puntos diferentes en el intervalo $\alpha < x < \beta$ no está cubierta por este Teorema. Realmente, este último problema puede no tener siempre una solución. Tales problemas son conocidos como problemas de valores a la frontera.

Para resolver la ecuación diferencial de segundo orden (12)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

encontraremos que es necesario resolver sólo la ecuación *homogénea,** o *reducida,* o *complementaria*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{14}$$

obtenida de la Ec. (12) haciendo $g(x) = 0$. Una vez que se conoce la solución de la ecuación homogénea (14) podemos, por un método general, resolver la ecuación nohomogénea (12). La sección siguiente contiene algunos resultados generales acerca de la ecuación homogénea (14). Entonces en la sección 3.5 mostraremos cómo se puede resolver la Ec. (14) en el caso particular de que las funciones p y q sean constantes. Aun este caso es de considerable importancia práctica; por ejemplo, la ecuación para el movimiento de una masa acoplada a un resorte tiene coeficientes constantes. En la sección 3.6 volveremos nuestra atención a la ecuación nohomogénea (12). El resto del capítulo está dedicado a aplicaciones en las áreas de vibraciones mecánicas y redes eléctricas.

PROBLEMAS

1. Para una ecuación diferencial de segundo orden de la forma $y'' = f(x, y')$, la substitución $v = y'$, $v' = y''$ conduce a una ecuación de primer orden de la forma $v' = f(x, v)$. Siempre y cuando esta ecuación pueda resolverse para v, puede obtenerse y integrando $dy/dx = v(x)$. Nótese que se obtiene una constante arbitraria al resolver la ecuación de primer orden para v, y una segunda al hacer la integración para y. Resuélvanse las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0$ b) $xy'' + y' = 1, \quad x > 0$
c) $y'' + x(y')^2 = 0$ d) $2x^2y'' + (y')^3 = 2xy', \quad x > 0$

2. Considérese una ecuación diferencial de segundo orden de la forma $y'' = f(y, y')$. Si hacemos v igual a y', obtenemos $v' = f(y, v)$. Esta ecuación contiene las variables v, x y y y por lo tanto no es de la forma de las ecuaciones de primer orden discutidas en el capítulo 2. Es posible pensar, para eliminar la variable x, que y es la variable independiente; entonces, por la regla de la cadena

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy},$$

y por lo tanto la ecuación diferencial original puede escribirse como

$$v\frac{dv}{dy} = f(y, v).$$

* Nótese que el uso de la palabra homogéneo aquí, no está relacionada a su uso en la discusión de las ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden en la sección 2.7.

Si esta ecuación de primer orden puede resolverse, obtenemos v como una función de y. Se encuentra una relación entre y y x resolviendo $dy/dx = v(y)$. Otra vez habrá dos constantes arbitrarias en el resultado final. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $yy'' + (y')^2 = 0$ *b*) $y'' + y = 0$

c) $y'' + y(y')^3 = 0$ *d*) $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales. Si se prescriben las condiciones iniciales, encuéntrese la solución que satisfaga las condiciones establecidas.

a) $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

b) $y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$

c) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + 3x^{-2} = 0, \quad x > 0$

d) $y'y'' - x = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$

4. Determine los intervalos para los cuales es seguro que exista una solución única de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales, que satisfacen las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, en donde x_0 es cualquier punto en el intervalo.

a) $xy'' + 3y = x$ *b*) $y'' + 6y' + 7y = 2\,\text{sen}\,x$

c) $x(x-1)y'' + 3xy' + 4y = 2$ *d*) $y'' + (\cos x)y' + 3(\ln|x|)y = 0$

e) $(1 + x^2)y'' + 4y' = e^x$ *f*) $e^xy'' + x^2y' + y = \tan x$

5. Suponiendo que p y q son continuas sobre un intervalo abierto que incluye el origen, y que $y = \phi(x)$ es una solución de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y(0) = a_0, \qquad y'(0) = a_1,$$

determinar $\phi''(0)$. Puede mostrarse, si p y q son polinomios, que la solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial anterior puede diferenciarse una infinidad de veces. Suponiendo que p y q son polinomios, determínese $\phi'''(0)$ en términos de a_0, a_1, $p(0)$, $p'(0)$, y $q'(0)$. ¿Puede este proceso continuar indefinidamente?

6. La solución de una ecuación de segundo orden de la forma $y'' = f(x, y, y')$ involucrará generalmente dos constantes arbitrarias. Inversamente, dada una familia de funciones que contienen dos constantes arbitrarias puede demostrarse que es la solución de alguna ecuación diferencial de segundo orden. Por eliminación de las constantes c_1 y c_2 entre y, y' y y'', encontrar la ecuación diferencial que es satisfecha por cada una de las siguientes familias de funciones.

a) $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ *b*) $y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x$

c) $y = c_1 + c_2x$ *d*) $y = (c_1 + c_2x)e^x$

e) $y = c_1x + c_2x^2$ *f*) $y = c_1\cosh x + c_2\,\text{senh}\,x$

g) $y = c_1x + c_2\,\text{sen}\,x$ *h*) $y = c_1 + c_2e^{-3x}$

3.2 SOLUCIONES FUNDAMENTALES DE LAS ECUACIONES HOMOGENEAS

En el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, es útil introducir la notación de operadores diferenciales. Sean p y q funciones continuas sobre un intervalo abierto $\alpha < x < \beta$. Entonces para cualquier función ϕ dos veces diferenciable sobre $\alpha < x < \beta$, definimos el *operador diferencial* L por la ecuación

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi. \tag{1}$$

Nótese que $L[\phi]$ también es una función sobre $\alpha < x < \beta$; en efecto, la misma L puede considerarse como una función cuyo dominio y rango son, ellos mismos, funciones de una simple variable real. El operador L es escrito a menudo como $L = D^2 + pD + q$, donde D es el operador derivada. El valor de la función $L[\phi]$ en el punto x es

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x).$$

Por ejemplo, si $p(x) = x^2$, $q(x) = 1 + x$, y $\phi(x) = \text{sen}\,3x$, entonces

$$\begin{aligned} L[\phi](x) &= (\text{sen}\,3x)'' + x^2(\text{sen}\,3x)' + (1 + x)\,\text{sen}\,3x \\ &= -9\,\text{sen}\,3x + 3x^2\cos 3x + (1 + x)\,\text{sen}\,3x. \end{aligned}$$

En esta sección estudiaremos ecuaciones homogéneas lineales de segundo orden

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x) = 0, \tag{2}$$

aquí se sobreentiende que las funciones p y q son continuas sobre un intervalo abierto $\alpha < x < \beta$. Recordaremos que se acostumbra usar el símbolo y para indicar el valor de la función que se discute, esto es, para la función ϕ tenemos $y = \phi(x)$, a menudo escribiremos en lugar de la Ec. (2)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3}$$

Enfatizaremos que $L[\phi]$ como está dada en la Ec. (1) es una función, mientras que $L[y]$ como está dada en la Ec. (3) es el valor de la función $L[\phi]$ en el punto x. De aquí que el símbolo y es tratado de una manera especial.

Usando el hecho de que si u_1, y u_2 son funciones diferenciables, entonces

$$[c_1u_1(x) + c_2u_2(x)]' = c_1u_1'(x) + c_2u_2'(x),$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, podemos derivar el siguiente Teorema importante.

Teorema 3.3. Si $y = y_1(x)$ *y* $y = y_2(x)$ *son soluciones de la ecuación diferencial* (3),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

entonces la combinación lineal $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, *donde* c_1 *y* c_2 *son constantes arbitrarias, también es una solución de la Ec.* (3).

Debemos demostrar que si $L[y_1] = y''_1 + py'_1 + qy_1 = 0$, y $L[y_2] = y''_2 + py'_2 + qy_2 = 0$,* entonces $L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$. Pero

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2] \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual prueba el Teorema. Si ponemos $c_2 = 0$ en la anterior demostración, obtenemos el resultado de que si la función y_1 es una solución de la Ec. (3), entonces cualquier múltiplo constante de y_1 también es una solución de la Ec. (3).

En el proceso de probar el Teorema 3.3, hemos mostrado que para dos funciones cualesquiera u_1 y u_2 que posean segundas derivadas continuas y para cualesquiera constantes arbitrarias c_1 y c_2,

$$L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2].$$

Un operador con esta propiedad es conocido como *operador lineal* y, en particular, el operador diferencial L es un operador diferencial lineal de segundo orden. Otro ejemplo de un operador lineal está dado en el problema 10.

El hecho de que una combinación lineal dé soluciones de una ecuación *homogénea lineal* sea también solución de la ecuación, es de una importancia fundamental, y a menudo mencionado como el *principio de superposición*. La teoría de ecuaciones lineales homogéneas incluyendo a las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden más alto y a las ecuaciones diferenciales parciales, depende firmemente del principio de superposición. Este principio es ilustrado por los siguientes ejemplos simples.

Ejemplo 1. Verificar por medio del cálculo directo que $\phi(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

Substituyendo $\phi(x)$ por y, tenemos

$$\begin{aligned} \phi''(x) + \phi(x) &= (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)'' + (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) \\ &= c_1[(\cos x)'' + \cos x] + c_2[(\operatorname{sen} x)'' + \operatorname{sen} x] = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Verificar que $\phi(x) = x + 1$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + 3y' + y = x + 4$, pero que $\psi(x) = 2\phi(x)$ no es solución.

Ya que $\phi'(x) = 1$, $\phi''(x) = 0$ tenemos

$$\phi''(x) + 3\phi'(x) + \phi(x) = 0 + 3(1) + (x + 1) = x + 4.$$

Sin embargo,

$$\psi''(x) + 3\psi'(x) + \psi(x) = 0 + 3(2) + 2(x + 1) \neq x + 4.$$

* Nótese que ya que $L[y_1]$ es una función, el cero sobre el miembro derecho de la afirmación $L[y_1] = 0$ realmente representa a la función que es idénticamente cero sobre $\alpha < x < \beta$.

Esta no es una contradicción del Teorema 3.3, ya que la ecuación diferencial no es homogénea.

Ejemplo 3. Mostrar que si las funciones y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación $L[y] = y'' + y^2 = 0$, *no* necesariamente se sigue que la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución.

Substituyendo, tenemos

$$\begin{aligned} (c_1y_1 + c_2y_2)'' + (c_1y_1 + c_2y_2)^2 &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1^2y_1^2 + 2c_1c_2y_1y_2 + c_2^2y_2^2 \\ &= c_1(y_1'' + c_1y_1^2) + c_2(y_2'' + c_2y_2^2) + 2c_1c_2y_1y_2 \\ &\neq c_1(y_1'' + y_1^2) + c_2(y_2'' + y_2^2). \end{aligned}$$

El principio de superposición falla debido a que la ecuación diferencial es no lineal.

Hemos visto que si las funciones y_1 y y_2 son soluciones de la Ec. (3), entonces la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución de la Ec. (3) y, correspondiendo a un número infinito de valores que podemos asignar a c_1 y c_2, podemos construir un número infinito de soluciones de la Ec. (3). Pero esta infinidad de soluciones ¿incluye a todas las soluciones posibles de la Ec. (3)?

Dos soluciones y_1 y y_2 de la Ec. (3) se dice que forman un *conjunto fundamental* de soluciones de la Ec. (3) si *cualquier* solución de la ecuación (3) puede ser expresada como una combinación lineal de y_1 y y_2. Entonces, para probar que dos soluciones y_1 y y_2, de la Ec. (3) forman un conjunto fundamental de soluciones, debemos mostrar que para cada solución $y = \phi(x)$ de la Ec. (3) podemos encontrar constantes c_1 y c_2 tales que $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

Representemos cualquier solución de la Ec. (3) por $y = \phi(x)$. Escojamos cualquier punto x_0 dentro del intervalo $\alpha < x < \beta$, y denotemos con y_0 y y'_0 a $\phi(x_0)$ y $\phi'(x_0)$, respectivamente. Ahora, si podemos escoger a c_1 y c_2 tales que

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= y_0, \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= y_0', \end{aligned} \tag{4}$$

entonces tendremos $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ ya que, de acuerdo con la parte referente a la unicidad en el Teorema 3.2, hay solamente una solución de la Ec. (3) que satisfaga las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'. \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) son dos ecuaciones algebraicas lineales simultáneas y siempre puede ser resuelta unívocamente para c_1 y c_2 probando que el determinante de los coeficientes no es nulo. Esto requiere que

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0.$$

El escoger el punto x_0 es completamente arbitrario, y entonces esta ecuación debe valer para todo x_0 dentro del intervalo $\alpha < x < \beta$. En este caso las Ecs. (4) siempre pueden ser resueltas haciendo caso omiso de los valores de y_0, y'_0, y x_0. Por lo tanto tenemos probado el siguiente Teorema.

Teorema 3.4. Si las funciones p y q son continuas sobre el intervalo abierto $\alpha < x < \beta$ *y si* y_1 *y* y_2 *son soluciones de la ecuación diferencial* (3),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

satisfacen la condición

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0 \tag{6}$$

para cada punto en $\alpha < x < \beta$ *entonces cualquier solución de la Ec.* (3) *sobre el intervalo* $\alpha < x < \beta$ *puede expresarse como una combinación lineal de* y_1 *y* y_2.

Se acostumbra llamar a la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ la *solución general* de la Ec. (3).

Ejemplo 4. Encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación

$$y'' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{7}$$

Por inspección observamos que $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ son soluciones de la Ec. (7). Además,

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \cos x \cos x - (-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x = 1.$$

Entonces si $y = \phi(x)$ es una solución de la Ec. (7), entonces existen constantes c_1 y c_2 tales que $\phi(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.

Dadas dos funciones derivables y_1 y y_2 en algún intervalo abierto, la función $y_1y'_2 - y'_1y_2$ es llamada el Wronskiano* de y_1 y y_2 y usualmente se escribe como

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2. \tag{8}$$

El valor del Wronskiano de y_1 y y_2 en el punto x lo denotaremos por $W(y_1, y_2)(x)$ o simplemente $W(x)$ si es que queda claro de qué funciones se trata.

Supongamos ahora que hemos encontrado dos soluciones, y_1 y y_2, de la Ec. (3). ¿Cómo determinamos si las funciones y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental, esto es, cómo determinamos si $W(y_1, y_2)$ se anula en el intervalo $\alpha < x < \beta$? En el ejemplo 4, $W(\cos x, \operatorname{sen} x) = 1$, y por lo tanto es claro que $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ constituyen un conjunto fundamental para la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ sobre cualquier intervalo. Sin embargo, en general, $W(y_1, y_2)$ no será constante, y puede dificultarse determinar si esa función se anula en

* En honor del matemático polaco, Wronski (1778-1853).

algún punto dentro de un intervalo $\alpha < x < \beta$. Afortunadamente esta cuestión está resuelta por el siguiente Teorema notable.

Teorema 3.5. Si las funciones p y q son continuas sobre el intervalo abierto $\alpha < x < \beta$, *y si las funciones* y_1 *y* y_2 *son soluciones de la ecuación diferencial* (3),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

sobre $\alpha < x < \beta$, *entonces* $W(y_1, y_2)$ *o se anula idénticamente, o nunca es cero en* $\alpha < x < \beta$.

La prueba de este Teorema puede basarse en un argumento similar al que se usó en la demostración del Teorema 3.4; no obstante, presentaremos una prueba alternante, con la cual también encontraremos una fórmula para $W(y_1, y_2)$. Usaremos el hecho de que las funciones y_1 y y_2 satisfacen

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 &= 0, \\ y_2'' + py_2' + qy_2 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Multiplicando la primera ecuación por $-y_2$, y la segunda por y_1, y sumándolas obtenemos

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + p(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \tag{10}$$

Llamando $W_{12}(x) = W(y_1, y_2)(x)$, y notando que

$$W_{12}' = y_1y_2'' - y_1''y_2, \tag{11}$$

nos permite escribir la Ec. (10) en la forma

$$W_{12}' + pW_{12} = 0. \tag{12}$$

Esta es una ecuación separable (sección 2.4) y también una ecuación lineal de primer orden (sección 2.1), la podemos integrar inmediatamente para obtener

$$W_{12}(x) = c \exp\left[-\int^x p(t)\,dt\right], \tag{13}$$

donde c es una constante.* Debido a que la función exponencial nunca se anula, $W_{12}(x)$ se anulará solamente si $c = 0$, y si $c = 0$ entonces $W_{12}(x)$ es idénticamente cero, esto prueba el Teorema. Además la Ec. (13) da una fórmula para determinar el Wronskiano de un conjunto fundamental de soluciones de la Ec. (3) hasta una constante multiplicativa sin resolver la ecuación. Nótese también que el Wronskiano de cualesquiera dos conjuntos fundamentales de soluciones pueden diferir solamente por una constante multiplicativa.

Combinando los resultados de los Teoremas 3.4 y 3.5 podemos establecer el siguiente Teorema.

* El resultado dado en la Ec. (13) fue deducido por el matemático noruego N.H. Abel (1802-1829) en 1827, y es conocido como la identidad de Abel.

Teorema 3.6. Si las funciones p y q son continuas en el intervalo abierto $\alpha < x < \beta$ y si las funciones y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial (3),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

sobre el intervalo $\alpha < x < \beta$, y si hay al menos un punto en $\alpha < x < \beta$ donde $W(y_1, y_2)$ no sea cero, entonces cualquier solución $y = \phi(x)$ de la Ec. (3) *puede expresarse en la forma*

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Finalmente debemos hacer ver que realmente existe un conjunto fundamental de soluciones de la Ec. (3). Esto es, debemos probar el siguiente Teorema.

Teorema 3.7. Si las funciones p y q son continuas sobre el intervalo abierto $\alpha < x < \beta$, entonces existe un conjunto fundamental de las soluciones de la ecuación diferencial (3),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

sobre el intervalo $\alpha < x < \beta$.

Sea c un punto en el intervalo $\alpha < x < \beta$. Del Teorema 3.2 se sigue existen soluciones únicas y_1 y y_2 para los problemas de valores iniciales

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \quad y(c) = 1, \quad y'(c) = 0$$
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \quad y(c) = 0, \quad y'(c) = 1$$

sobre el intervalo $\alpha < x < \beta$. Se ve fácilmente que $W(y_1, y_2)(c) = 1 \neq 0$. Por lo tanto, del Teorema 3.6 se sigue que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la Ec. (3).

PROBLEMAS

1. Verificar que e^x y e^{-2x} y la combinación lineal $c_1e^x + c_2e^{-2x}$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

2. Encontrar la solución única de la ecuación diferencial del problema 1, que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. ¿Cuál es la solución única de este problema si las condiciones iniciales son $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$?

3. Verificar que e^x y e^{-x} son soluciones de $y'' - y = 0$. Hecho esto mostrar que $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$ y $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ son también soluciones de esta ecuación diferencial.

4. Verificar que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son soluciones de $y'' + y = 0$. Aceptando por un momento que $(cf)' = cf'$ donde f es una función de valores reales y c es un número complejo, mostrar que la combinación lineal $(1 + i)\operatorname{sen} x + (2 - i)\cos x$ es también una solución de $y'' + y = 0$. Aquí i es la unidad imaginaria, $i^2 = -1$.

5. Verificar que x^2 y x^{-1} y la combinación lineal $c_1x^2 + c_2x^{-1}$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2y = 0$, $x > 0$.

6. Verificar que 1 y $x^{1/2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$, $x > 0$; pero que la combinación lineal $c_1 + c_2x^{1/2}$ no es, en general, una solución, ¿por qué?

7. Mostrar que si $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$, $g(x) \not\equiv 0$, entonces $y = c\phi(x)$, donde c es cualquier otra constante diferente de la unidad, no es una solución. ¿Por qué?

8. Si $L[y] = ay'' + bg' + cy$, donde a, b y c son constantes, calcular

a) $L[x]$ *b*) $L[\operatorname{sen} x]$

c) $L[e^{rx}]$, siendo r una constante *d*) $L[x^r]$, siendo r una constante

9. Si $L[y] = ax^2y'' + bxy' + cy$, donde a, b y c son constantes, calcular

a) $L[x^2]$ *b*) $L[e^{rx}]$, siendo r una constante

c) $L[x^r]$, siendo r una constante

10. Mostrar que el operador M definido por

$$M[u](x) = \int_\alpha^\beta K(x - t)u(t)\,dt, \qquad \alpha < x < \beta,$$

donde la función K es continua sobre el intervalo $\alpha - \beta \leq s \leq \beta - \alpha$, es un operador lineal; esto es, mostrar que

$$M[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1M[u_1] + c_2M[u_2]$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

11. Calcular el Wronskiano de los siguientes pares de funciones:

a) e^{mx}, e^{nx}, donde m y n son enteros y $m \neq n$

b) $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ *c*) x, xe^x

d) $e^x \operatorname{sen} x$, $e^x \cos x$ *e*) $\cos^2 x$, $1 + \cos 2x$

12. En los problemas siguientes verificar que las funciones y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial dada y determinar en cuáles intervalos forman estas soluciones un conjunto fundamental. Hacer esto calculando $W(y_1, y_2)$.

a) $y'' + \lambda^2y = 0$; $y_1(x) = \operatorname{sen} \lambda x$, $y_2(x) = \cos \lambda x$, donde λ es un número real

b) $y'' - y' - 2y = 0$; $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{2x}$

c) $y'' - 2y' + y = 0$; $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$

d) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$

Nótese que si la ecuación de la parte *d*) se pone en la forma estándar $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, los coeficientes $p(x) = -(x + 2)/x$ y $q(x) = (x + 2)/x^2$ se hacen no acotados cuando $x \to 0$, pero las soluciones x y xe^x se comportan perfectamente cuando $x \to 0$. Por lo tanto no se concluye necesa-

riamente que en un punto donde los coeficientes son discontinuos la solución será discontinua, sin embargo, a menudo éste es el caso.

13. En los problemas siguientes verificar que las funciones y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial dada, y determinar la solución que satisface las condiciones iniciales prescritas.

a) $y'' - y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1;\qquad y_1(x) = e^{x},\quad y_2(x) = e^{-x}$

b) $y'' - y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1;\qquad y_1(x) = \operatorname{senh} x,\quad y_2(x) = \cosh x$

Comparar con el resultado de la parte *a*)

c) $y'' + 5y' + 6y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 1;\qquad y_1(x) = e^{-2x},\quad y_2(x) = e^{-3x}$

d) $y'' + y' = 0,\quad y(1) = 0,\quad y'(1) = 1;\qquad y_1(x) = 2,\quad y_2(x) = e^{-x}$

En los problemas 14, 15 y 16 supóngase que p y q son continuos, y que las funciones y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sobre el intervalo $\alpha < x < \beta$.

14. Probar que si y_1 y y_2 se anulan en el mismo punto dentro de $\alpha < x < \beta$, entonces no pueden formar un conjunto fundamental de soluciones dentro de ese intervalo.

15. Probar que si y_1 y y_2 tienen máximos o mínimos en el mismo punto en $\alpha < x < \beta$, entonces no pueden formar un conjunto fundamental de soluciones dentro de ese intervalo.

*16. Probar que si y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones, entonces no pueden tener un punto de inflexión común en $\alpha < x < \beta$ a menos que p y q se anulen en ese punto simultáneamente.

*17. El concepto de exactitud que fue discutido para las ecuaciones diferenciales de primer orden puede extenderse a las ecuaciones lineales de segundo orden. La ecuación $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ se dice que es exacta si puede escribirse en la forma $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$, donde $f(x)$ debe determinarse en términos de $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$. La última ecuación puede integrarse una vez inmediatamente para dar una ecuación lineal de primer orden para y que puede resolverse por el método de la sección 2.1. Mostrar que igualando los coeficientes de las ecuaciones anteriores, y eliminando entonces $f(x)$, que una condición necesaria para la exactitud es $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. Puede mostrarse también que ésta es una condición suficiente para la exactitud. Determine cuál de las ecuaciones siguientes es exacta; de las que lo sean encuéntrese su solución.

a) $y'' + xy' + y = 0$

b) $y'' + 3x^2y' + xy = 0$

c) $xy'' - (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0,\qquad x > 0$

d) $x^2y'' + xy' - y = 0,\qquad x > 0$

*18. Si una ecuación homogénea lineal de segundo orden no es exacta, puede hacerse exacta multiplicando por un apropiado factor integrante $\mu(x)$. Por lo tanto requerimos que $\mu(x)$ sea tal que $\mu(x)P(x)y'' + \mu(x)Q(x)y' + \mu(x)R(x)y = 0$ puede ser escrito en la forma $[\mu(x)P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$.

Mostrar, igualando los coeficientes en estas dos ecuaciones y eliminando entonces $f(x)$ que la función μ debe satisfacer a

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0.$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación adjunta*. Juega un papel muy importante en la teoría avanzada de ecuaciones diferenciales. En general el problema de resolver la ecuación diferencial adjunta, es tan difícil como resolver la ecuación original. Determinar la ecuación adjunta para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) La ecuación de Bessel de orden ν:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

b) La ecuación de Legendre de orden α:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

c) La ecuación de Airy:

$$y'' - xy = 0$$

d) La ecuación de Whittaker

$$x^2y'' + \left(-\frac{x^2}{4} + kx + \frac{1}{4} - m^2\right)y = 0,$$

donde k y m son enteros.

*19. Mostrar que para la ecuación lineal de segundo orden $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ que la adjunta de la adjunta es la ecuación original.

*20. Una ecuación lineal de segundo orden $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ se dice que es *autoadjunta*, si su adjunta es idéntica a la ecuación original. Mostrar que una condición necesaria para que una ecuación diferencial sea autoadjunta es que $P'(x) = Q(x)$. Determine cuál de las ecuaciones del problema 18 es autoadjunta.

3.3 INDEPENDENCIA LINEAL

El concepto de la solución general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden como una combinación lineal de dos soluciones, cuyo Wronskiano no se anula, está íntimamente relacionado al concepto de independencia lineal de dos funciones. Este es un concepto muy importante que tiene importancia y significado mucho más allá del problema que estamos considerando; lo discutiremos brevemente en esta sección.

Se dice que dos funciones f y g son *linealmente dependientes* sobre un intervalo $\alpha < x < \beta$ si existen dos constantes c_1 y c_2, ambas diferentes de cero, tales que

$$c_1f(x) + c_2g(x) = 0 \tag{1}$$

para toda x en $\alpha < x < \beta$. Se dice que dos funciones f y g son *linealmente independientes* sobre un intervalo $\alpha < x < \beta$ si ellas no son linealmente dependientes. Las mismas definiciones se aplican sobre cualquier intervalo, abierto o no.

Ejemplo 1. Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos(x+\pi/2)$ son linealmente dependientes sobre cualquier intervalo ya que

$$c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

para toda x si elegimos $c_1 = 1, c_2 = 1$.

Ejemplo 2. Mostrar que las funciones e^x y e^{2x} son linealmente independientes sobre cualquier intervalo.

Mostraremos que las funciones son linealmente independientes haciendo ver que es imposible encontrar constantes c_1 y c_2, ambas no cero, tales que

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0$$

para toda x en el intervalo dado. Sean x_0 y $x_1 \neq x_0$ dos puntos en el intervalo. De la ecuación anterior

$$c_1 e^{x_0} + c_2 e^{2x_0} = 0,$$
$$c_1 e^{x_1} + c_2 e^{2x_1} = 0.$$

Ya que el determinante de los coeficientes es $e^{2x_1+x_0} - e^{2x_0+x_1} \neq 0$ se concluye que la única solución de estas ecuaciones es $c_1 = c_2 = 0$. De aquí que e^x y e^{2x} sean linealmente independientes.

Podemos restablecer ahora el Teorema 3.6 usando el concepto de independencia lineal.

Teorema 3.8. Si las funciones p y q son continuas sobre el intervalo abierto $\alpha < x < \beta$, y si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

entonces $W(y_1, y_2)$ es no nulo en $\alpha < x < \beta$, y por lo tanto cualquier solución de la Ec. (2) puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones y_1 y y_2.

Para probar este Teorema debemos mostrar que si y_1 y y_2 son soluciones de la Ec. (2) y son linealmente independientes sobre $\alpha < x < \beta$, entonces $W(y_1, y_2)$ no se anula sobre $\alpha < x < \beta$. Vamos a suponer que existe un punto x_0, $\alpha < x_0 < \beta$, tal que $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$; mostraremos que esto nos lleva a una contradicción. Si $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$, entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

para c_1 y c_2 tiene una solución no trivial. Usando estos valores de c_1 y c_2 dese $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Entonces ϕ es una solución de la Ec. (2) y, además, por la Ec. (3), satisface las condiciones iniciales $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$. Por lo tanto, por el Teorema de existencia y unicidad (ver ejemplo 2 de la sección 3.1) $\phi(x) = 0$ para toda x en $\alpha < x < \beta$. Entonces

$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ para toda x en $\alpha < x < \beta$ lo cual implica que y_1 y y_2 son linealmente dependientes, lo cual es una contradicción.

El inverso del Teorema 3.8 también es verdadero, por ejemplo si $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$, y $W(y_1, y_2) \neq 0$ sobre $\alpha < x < \beta$, entonces las funciones y_1 y y_2 son linealmente independientes sobre $\alpha < x < \beta$. Para establecer este hecho, supongamos otra vez lo contrario: que y_1 y y_2 son linealmente dependientes sobre $\alpha < x < \beta$. Existen entonces c_1 y c_2, no ambas cero, tales que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \tag{4}$$

para cada x en $\alpha < x < \beta$. Se concluye entonces que

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \tag{5}$$

también sobre $\alpha < x < \beta$. Para que los valores diferentes de cero de c_1 y/o c_2 satisfagan las Ecs. (4) y (5) es necesario (y suficiente) que $W(y_1, y_2)$ se anule para cada x, lo cual es una contradicción. De aquí que dos soluciones de la Ec. (2) sean linealmente independientes si y sólo si su Wronskiano es diferente de cero en cada punto del intervalo.

Debemos enfatizar que esta relación entre el Wronskiano y la independencia lineal no vale más si las funciones no son soluciones de la Ec. (2). Un ejemplo de dos funciones linealmente independientes cuyo Wronskiano se anula idénticamente está dado en el problema 10.

Es interesante notar que la conclusión del Teorema 3.8 es similar a una propiedad simple del álgebra vectorial en dos dimensiones. Dos vectores **a** y **b** se dice que son linealmente dependientes si hay dos escalares c_1 y c_2 no ambos nulos, tales que $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$; de otra manera se dice que son linealmente independientes. Sean **i** y **j** vectores unitarios dirigidos a lo largo de los ejes positivos x y y respectivamente. Además sabemos que cualquier vector con componentes a_1 y a_2 puede escribirse como $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, esto es, como una combinación lineal de los dos vectores linealmente independientes **i** y **j**. No es difícil mostrar que cualquier vector en dos dimensiones puede representarse como una combinación lineal de cualquier par de vectores dimensionales linealmente independientes (ver problema 7). Tal par de vectores linealmente independientes se dice que forman una base, o que generan el espacio vectorial de vectores de dos dimensiones.

El término espacio vectorial se aplica también a otras colecciones de objetos matemáticos que satisfacen las mismas leyes de suma y multiplicación por escalares que los vectores geométricos. Por ejemplo, puede mostrarse que el conjunto de funciones que son derivables dos veces sobre $\alpha < x < \beta$ forma un espacio vectorial. Similarmente el espacio V de funciones que satisfacen la Ec. (2) forma también un espacio vectorial.

Ya que cada miembro de V puede expresarse como una combinación lineal de dos miembros linealmente independientes y_1 y y_2, decimos que cada par genera V o forma una base para V. Esto conduce a la conclusión de que V es bidimensional, [la Ec. (2) es de segundo orden] y es análogo en muchos aspectos al espacio de los vectores geométricos en un plano. Posteriormente encontraremos que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial homogénea de enésimo grado, forma un espacio vectorial de dimensión n, el

cual está generado por cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 4 probar que las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' - y = 0;\quad y_1(x) = e^x,\quad y_2(x) = e^{-x}$
2. $y'' - y = 0;\quad y_1(x) = \cosh x,\quad y_2(x) = \operatorname{senh} x$
3. $y'' - y' - 6y = 0;\quad y_1(x) = e^{-2x},\quad y_2(x) = e^{3x}$
4. $x^2y'' + xy' - 4y = 0,\quad x > 0;\quad y_1(x) = x^2,\quad y_2(x) = x^{-2}$

5. Probar que si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, entonces c_1y_1 y c_2y_2 son soluciones linealmente independientes siempre y cuando ni c_1 ni c_2 sean cero.

6. Probar que si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, entonces $y_3 = y_1 + y_2$ y $y_4 = y_1 - y_2$ también forman un conjunto fundamental de soluciones.

7. *a*) Probar que cualquier vector bidimensional puede escribirse como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
Sugerencia: Cualquier vector $\mathbf{a}$ puede escribirse como $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. Mostrar que es posible determinar c_1 y c_2 tales que $\mathbf{a} = c_1(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + c_2(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ igualando las dos expresiones para $\mathbf{a}$ y resolviendo para c_1 y c_2 en términos de a_1 y a_2.
b) Probar que si los vectores $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ son linealmente independientes, entonces cualquier vector $\mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j}$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Nótese que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son linealmente independientes entonces $x_1y_2 - y_1x_2 \neq 0$. ¿Por qué?

*8. Verificar que x y x^2 son linealmente independientes sobre $-1 < x < 1$, pero que $W(x, x^2)$ se anula en $x = 0$. ¿Puede usted concluir de esta propiedad que x y x^2 son soluciones de la Ec. (2) del texto? Mostrar que x y x^2 son soluciones de $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. ¿Contradice esto la conclusión anterior? ¿Contradice al Teorema 3.5 de la sección 3.2?

*9. Si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, mostrar que entre ceros consecutivos de y_1 hay un cero y sólo uno de y_2.
Sugerencia: Use el Teorema de Rolle (1652-1719) y trate de probar la conclusión por contradicción. Este resultado se conoce a menudo como Teorema de Sturm (1803-1855). Como un ejemplo particular nótese que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son soluciones linealmente independientes de $y'' + y = 0$.

10. Mostrar que las funciones $y_1(x) = x|x|$ y $y_2(x) = x^2$ son linealmente dependientes sobre $0 < x < 1$ y sobre $-1 < x < 0$, pero linealmente independientes sobre $-1 < x < 1$. Nótese que mientras que y_1 y y_2 son linealmente independientes, $W(y_1, y_2)$ es idénticamente cero sobre $-1 < x < 1$; de aquí que y_1 y y_2 no puedan ser soluciones de la Ec. (2) del texto.

3.4 REDUCCION DE ORDEN

Un hecho muy útil e importante es el siguiente: Si se conoce una solución de una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden, puede determinarse una segunda solución linealmente independiente (y de aquí un conjunto fundamental de soluciones). El procedimiento que es debido a D'Alembert,* se conoce generalmente como el método de reducción de orden.

Supóngase que conocemos una solución y_1, no idénticamente cero, de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Entonces cy_1, donde c es una constante, es también una solución de la Ec. (1). Esto sugiere la pregunta siguiente: ¿Podemos determinar una función v, no constante, tal que $y = v(x)y_1(x)$ sea una solución de la Ec. (1)? La respuesta es sí, y además, veremos que v puede determinarse de una manera directa. Si ponemos

$$y = v(x)y_1(x), \tag{2}$$

entonces

$$y' = v(x)y_1'(x) + v'(x)y_1(x)$$

$$y'' = v(x)y_1''(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v''(x)y_1(x).$$

Substituyendo para y, y', y y'' en la Ec. (1) y colectando términos obtenemos

$$v(y_1'' + py_1' + qy_1) + v'(2y_1' + py_1) + v''y_1 = 0. \tag{3}$$

Ya que y_1 es una solución de la Ec. (1), la cantidad en el primer paréntesis es cero. En cualquier intervalo en el que no se anule y_1, podemos dividir entre y_1 obteniendo

$$v'' + \left(p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)v' = 0. \tag{4}$$

La ecuación (4) es una *ecuación lineal de primer orden* para v' y puede resolverse inmediatamente (sección 2.1). La solución es

$$\begin{aligned} v'(x) &= c \exp\left[-\int^x \left(p(s) + \frac{2y_1'(s)}{y_1(s)}\right) ds\right] \\ &= cu(x), \end{aligned} \tag{5}$$

donde c es una constante arbitraria, y

$$u(x) = \frac{1}{[y_1(x)]^2} \exp\left[-\int^x p(s)\, ds\right]. \tag{6}$$

Entonces

$$v(x) = c\int^x u(t)\, dt + k, \tag{7}$$

* Jean D'Alembert (1717-1783), un matemático francés, es particularmente famoso por su trabajo en mecánica e hidrodinámica.

donde k es también una constante arbitraria. Sin embargo, podemos omitir la constante k ya que

$$y = y_1(x)v(x)$$
$$= cy_1(x)\int^x u(t)\,dt + ky_1(x), \tag{8}$$

y de aquí que esta constante sólo agregue un múltiplo de $y_1(x)$ a la segunda solución. Por lo tanto, dos soluciones de la Ec. (1) son

$$y = y_1(x) \qquad \text{y} \qquad y = y_1(x)\int^x u(t)\,dt. \tag{9}$$

Ya que la antiderivada de la función u no puede ser una constante, las soluciones son linealmente independientes. Al usar el método de la reducción de orden *no es* importante tratar de memorizar las Ecs. (9) y (6); lo que es importante es recordar que si se conoce una solución y_1 puede encontrarse una segunda solución de la forma $y = v(x)y_1(x)$ usando el procedimiento anterior.

Mientras que el método de reducción de orden no nos dice cómo encontrar la primera solución de la Ec. (1), es estimulante saber que hemos *reducido* el problema de resolver la Ec. (1) al de encontrar solamente una solución.

También es posible deducir la segunda solución linealmente independiente dada en la Ec. (9) usando la fórmula de Abel para el Wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de la Ec. (1). Esto se discute en los problemas 8 y 9.

Ejemplo. Mostrar que $y = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden uno

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad -1 < x < 1, \tag{10}$$

y encontrar una segunda solución linealmente independiente.

Primero si $y = x$, entonces $y' = 1$ y $y'' = 0$. Substituyendo y, y', y y'' en la Ec. (10) se tiene

$$(1 - x^2)\cdot 0 - 2x + 2x = 0,$$

de tal forma que en verdad $y = x$ es una solución. Para encontrar una segunda solución hagamos $y = xv(x)$; entonces

$$y' = xv' + v, \qquad y'' = xv'' + 2v'.$$

Substituyendo y, y' y y'' en la Ec. (10) tenemos

$$(1 - x^2)(xv'' + 2v') - 2x(xv' + v) + 2xv = 0.$$

Reuniendo términos y dividiendo entre $x(1 - x^2)$ obtenemos

$$v'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1 - x^2}\right)v' = 0. \tag{11}$$

Nótese que el coeficiente de v' no está definido en $x = 0$, el cero de $y_1(x)$. Sin embargo, esto no dará lugar a ninguna dificultad en la solución final. Obtendremos primero una solución de la Ec. (11) en los intervalos $-1 < x < 0$ y $0 < x < 1$.

La Ec. (11) es una ecuación lineal de primer orden para v', y el factor de integración es $x^2(1 - x^2)$; de aquí que

$$[x^2(1 - x^2)v']' = 0,$$
$$x^2(1 - x^2)v' = c,$$

tal que

$$v(x) = c\int^x \frac{dt}{t^2(1 - t^2)} = c\int^x \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1 - t^2}\right) dt$$
$$= c\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Consecuentemente una segunda solución (suprimiendo una constante multiplicativa sin pérdida de generalidad) de la Ec. (10) es

$$y_2(x) = xv(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}. \tag{12}$$

Aunque la función v está indefinida en $x = 0$, claramente existe el límite de $y_2(x) = xv(x)$ cuando $x \to 0$. La función y_2 definida por la Ec. (12) sobre $-1 < x < 1$, realmente satisface la ecuación diferencial (10) sobre $-1 < x < 1$, y no justamente sobre $-1 < x < 0$ y $0 < x < 1$. Por otra parte, $y_2(x)$ se hace no acotada cuando $x \to \pm 1$; esto está muy relacionado con el hecho de que en la Ec. (10) el coeficiente de y'' se anula en $x = \pm 1$, mientras que los coeficientes de y' y y son diferentes de cero. Esto será discutido posteriormente en el capítulo 4.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 5 encuéntrese una segunda solución de la ecuación diferencial dada, utilizando el método de reducción de orden.

1. $y'' - 4y' - 12y = 0, \quad y_1(x) = e^{6x}$
2. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y_1(x) = e^{-x}$
3. $x^2y'' + 2xy' = 0, \quad y_1(x) = 1$. ¿Para qué rango de x puede esperarse que sea válida la solución?
4. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y_1(x) = x$. ¿Para qué rango de x se puede esperar que sea válida la solución?
5. $(1 - x\cot x)y'' - xy' + y = 0, y_1(x) = x$. Considérese el intervalo $0 < x < \pi$.
0

Sugerencia: $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1 - x\cot x} = \ln(x\cos x - \operatorname{sen} x).$

6. Verificar que $y_1(x) = 3x^2 - 1$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden dos,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0,$$

y determínese una segunda solución. Considérense los intervalos $-1 < x < -1/\sqrt{3}$, $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$, y $1/\sqrt{3} < x < 1$ separadamente, pero obsérvese que el resultado final para y_2 es válido sobre $-1 < x < 1$.

7. Verificar que $y_1(x) = x^{-1/2}$ sen x es una solución de la ecuación de Bessel de orden un medio,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0,$$

y determínese una segunda solución. Considérese el intervalo $0 < x < \infty$.

8. Supóngase que y_1 es una solución no nula de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ y que deseamos encontrar una segunda solución y_2 linealmente independiente. Mostrar que $(y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$ y usar entonces la fórmula de Abel para $W(y_1, y_2)$ para obtener y_2.

9. Verificar que $y_1(x) = x$ es una solución de $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $x > 0$, y entonces, usando el resultado del problema 8, determínese una segunda solución linealmente independiente.

3.5 ECUACIONES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Volveremos ahora de la teoría general de ecuaciones homogéneas lineales de segundo orden a los métodos para resolver realmente esas ecuaciones. En esta sección consideraremos el problema de encontrar la solución general de una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes.* El problema correspondiente, con coeficientes variables, que es mucho más difícil, se considerará en el capítulo 4.†

Considérese la ecuación

$$\begin{aligned} L[y] &= ay'' + by' + cy = 0 \\ &= (aD^2 + bD + c)y = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $a \neq 0$, b y c son números reales. Ya que a, b y c son constantes, se concluye inmediatamente del Teorema de existencia y unicidad 3.2, que las soluciones de la Ec. (1) serán válidas sobre el intervalo $-\infty < x < \infty$.

Una pista del método necesario para resolver la Ec. (1) puede encontrarse simplemente leyendo la ecuación; esto es, ¿cuál función $y = \phi(x)$ satisface la relación de que a veces su segunda derivada más b veces su primera derivada

* Tanto Daniel Bernoulli (1700-1782) como Euler (1707-1783) sabían cómo resolver tales ecuaciones antes de 1740. La primera publicación fue hecha por Euler en 1743. Euler fue un matemático prolífico. La colección de sus trabajos llena más de 60 volúmenes. Aunque fue ciego durante los últimos 17 años de su vida, su trabajo continuó sin disminuir.

† En algunos casos es posible reducir una ecuación diferencial con coeficientes variables a una con coeficientes constantes mediante un cambio de variable adecuado. Ver problemas 16, 17 y 18 de la sección 3.5.1.

más c veces la función misma sumadas todas nos da cero para toda x? Con coeficientes constantes es natural primero considerar funciones $y = \phi(x)$ tales que y, y', y'' difieren sólo por factores multiplicativos constantes.

Una función que ha sido estudiada extensamente en el cálculo elemental tiene justamente la propiedad que deseamos: la función exponencial e^{rx}. Entonces trataremos de encontrar soluciones de la Ec. (1) de la forma e^{rx} eligiendo adecuadamente valores de r. Substituyendo $y = e^{rx}$ en la Ec. (1) llegamos a la ecuación

$$L[e^{rx}] = a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + ce^{rx} = 0 \tag{2}$$

ó

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0. \tag{3}$$

Ya que e^{rx} nunca se anula, debemos tener

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4}$$

Por lo tanto si r es una raíz de esta ecuación cuadrática, a menudo llamada la *ecuación auxiliar o característica*, e^{rx} es una solución de la Ec. (1). Nótese que los coeficientes de la ecuación auxiliar (4) son los mismos que los de la ecuación diferencial (1). Las raíces r_1 y r_2 de la Ec. (4) están dadas por

$$r_1 = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}. \tag{5}$$

La naturaleza de las soluciones de la Ec. (1) dependen claramente de los valores de r_1 y r_2 que a su vez dependen de los coeficientes constantes en la ecuación diferencial a través de las relaciones (5). De la misma manera que en el álgebra elemental, debemos examinar separadamente los casos $b^2 - 4ac$ positivo, cero y negativo.

Raíces Reales y Desiguales. Para $b^2 - 4ac > 0$, las Ecs. (5) dan dos valores reales y desiguales para r_1 y r_2. Por lo tanto, e^{r_1x} y e^{r_2x} son soluciones de la Ec. (1). Además es fácil verificar que $W(e^{r_1x}, e^{r_2x})$ no es cero en ninguna parte; por lo tanto la solución general de la Ec. (1) es

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}. \tag{6}$$

Ejemplo 1. Encontrar la solución de la ecuación diferencial $y'' + 5y' + 6y = 0$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Substituyendo $y = e^{rx}$ llegamos a

$$r^2 + 5r + 6 = 0,$$

$$(r + 3)(r + 2) = 0;$$

de aquí que $r = -2, -3$. La solución general es

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}.$$

Para satisfacer las condiciones iniciales en $x = 0$ debemos tener

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad -2c_1 - 3c_2 = 1.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = -1.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial que satisface las condiciones prescritas es

$$y = e^{-2x} - e^{-3x}.$$

Raíces Reales e Iguales. Cuando $b^2 - 4ac = 0$, de acuerdo con las Ecs. (5), $r_1 = r_2 = -b/2a$ y tenemos únicamente la solución $e^{-(b/2a)x}$. Sin embargo, podemos usar el método de reducción de orden (ver sección 3.4) para reducir el orden de la ecuación y encontrar una segunda solución. Sea

$$y = v(x)e^{-(b/2a)x};$$

entonces

$$y' = v'(x)e^{-(b/2a)x} - \frac{b}{2a} v(x)e^{-(b/2a)x},$$

$$y'' = \left[v''(x) - \frac{b}{a} v'(x) + \frac{b^2}{4a^2} v(x)\right]e^{-(b/2a)x}.$$

Substituyendo para y, y', y y'' en la Ec. (1) y dividiendo por el factor común $e^{-(b/2a)x}$ se obtiene la siguiente ecuación para v:

$$a\left(v'' - \frac{b}{a} v' + \frac{b^2}{4a^2} v\right) + b\left(v' - \frac{b}{2a} v\right) + cv = 0.$$

Después de colectar términos semejantes encontramos que

$$av'' - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right)v = 0.$$

Ya que $b^2 - 4ac = 0$ el último término se elimina, y obtenemos

$$v'' = 0.$$

De aquí que

$$v(x) = c_1 x + c_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Consecuentemente, una segunda solución de la Ec. (1) es $(c_1 x + c_2)e^{-(b/2a)x}$. En particular, correspondiendo a $c_2 = 0$, $c_1 = 1$ obtenemos $xe^{-(b/2a)x}$. Entonces, en el caso $b^2 - 4ac = 0$, dos soluciones linealmente independientes de la Ec. (1) son $e^{r_1 x}$ y $xe^{r_1 x}$($r_1 = -b/2a$), y la solución general es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}. \tag{7}$$

Ejemplo 2. Mostrar que la solución general de

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

es $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

Substituyendo $y = e^{rx}$ llegamos a

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r + 2)(r + 2) = 0;$$

aquí $r = -2$ es una raíz repetida de la ecuación auxiliar. Una solución es e^{-2x} y una segunda solución, linealmente independiente, de acuerdo con la teoría anterior es xe^{-2x}. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

Hay una forma alternativa interesante de determinar la segunda solución cuando las raíces de la ecuación auxiliar son iguales. Ya que r_1 es una raíz repetida de $ar^2 + br + c = 0$, se concluye que $ar^2 + br + c = a(r - r_1)^2$. Entonces, para toda r

$$L[e^{rx}] = a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + ce^{rx} = ae^{rx}(r - r_1)^2. \tag{8}$$

El miembro derecho de la Ec. (8) se anula cuando $r = r_1$, lo cual muestra que $e^{r_1 x}$ es una solución de la Ec. (1) como ya sabíamos. Derivando ambos miembros de la Ec. (8) con respecto a r, e intercambiando la derivación con respecto a r y a x, obtenemos

$$L[xe^{rx}] = axe^{rx}(r - r_1)^2 + 2ae^{rx}(r - r_1). \tag{9}$$

Cuando $r = r_1$ el miembro derecho de la Ec. (9) se anula y por lo tanto $L[xe^{r_1 x}] = 0$; de aquí que $xe^{r_1 x}$ sea también una solución de la Ec. (1).

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 13 determínese la solución general de la ecuación diferencial dada. Si se dan condiciones iniciales, encontrar la solución que las satisfaga.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $4y'' + 4y' + y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' - y = 0$
6. $y'' - 2y' + y = 0$
7. $y'' + 5y' = 0$
8. $y'' - 9y' + 9y = 0$
9. $y'' - 2y' - 2y = 0$
10. $y'' + 2y' + y = 0$
11. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
12. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
13. $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
14. Mostrar que la solución general de $y'' - 4y = 0$ es

$$y = c_1 \operatorname{senh} 2x + c_2 \cosh 2x.$$

15. Mostrar que si $r_1 \neq r_2$ entonces las funciones $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$ son linealmente independientes en $-\infty < x < \infty$. Esto completa la prueba del resultado dado en la Ec. (6) en el texto.

3.5.1 RAICES COMPLEJAS

Para completar la discusión de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

consideremos el caso en el cual las raíces de la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

son números complejos de la forma $\lambda + i\mu$ donde λ y μ son reales. Inmediatamente surge la cuestión de qué queremos decir con la expresión $e^{(\lambda+i\mu)x}$.

Primero recordemos que en cálculo elemental se mostró que la serie de Taylor (1685-1731) para e^x alrededor de $x = 0$ es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Si substituimos ix por x en la Ec. (3) y tomamos el resultado como la definición de e^{ix}, encontraremos que

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{aligned} \tag{4}$$

donde hemos usado el hecho de que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc. La primera serie en la Ec. (4) es precisamente la serie de Taylor para el $\cos x$, y la segunda es la serie de Taylor para $\operatorname{sen} x$. Por lo tanto *definimos*

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x. \tag{5}$$

Esta relación es llamada fórmula de Euler. Substituyendo $-x$ por x en la Ec. (5) y usando las relaciones $\cos(-x) = \cos x$, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ obtenemos

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x. \tag{6}$$

Las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ pueden expresarse en términos de e^{ix} y e^{-ix} sumando y restando respectivamente las Ecs. (5) y (6). Obtenemos

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En seguida *definimos*

$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x). \tag{7}$$

Con estas definiciones puede mostrarse que las leyes usuales del álgebra son válidas. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{e^{(\lambda+i\mu)x}}{e^{(\alpha+i\beta)x}} &= e^{(\lambda+i\mu)x-(\alpha+i\beta)x} \\ &= e^{(\lambda-\alpha)x+i(\mu-\beta)x}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [e^{(\lambda+i\mu)x}]^n &= e^{n(\lambda+i\mu)x} \\ &= e^{n\lambda x+in\mu x}, \end{aligned}$$

donde n es un entero positivo o negativo. En realidad el último resultado también es válido para valores no enteros de n.

Finalmente debemos considerar la cuestión de la derivación de $e^{(\lambda+i\mu)x}$ con respecto a x. Aunque sabemos que

$$\frac{d}{dx}(e^{rx}) = re^{rx} \tag{8}$$

para r un número real, no sabemos si esto es verdadero para r compleja. Sin embargo, puede probarse por cálculo directo usando la definición dada en la Ec. (7) que la Ec. (8) es verdadera para r compleja. Realmente las leyes usuales del cálculo elemental son válidas para exponenciales complejos, en el entendimiento de que e^{rx} está definido por la Ec. (7) para r compleja. Más generalmente, para una función de valores complejos $f(x) = u(x) + iv(x)$, donde u y v son funciones de valores reales, y para c una constante compleja, tenemos $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$ y $(cf)' = cf'$

Ahora podemos regresar al problema de resolver la Ec. (1) cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas. Ya que a, b y c son reales, las raíces ocurren por pares conjugados $r_1 = \lambda + i\mu$ y $r_2 = \lambda - i\mu$; de aquí que la solución general de la Ec. (1) es

$$y = c_1 e^{(\lambda+i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda-i\mu)x}. \tag{9}$$

La solución general (9) tiene la desventaja de que las funciones $e^{(\lambda+i\mu)x}$ y $e^{(\lambda-i\mu)x}$ toman valores complejos. Debido a que la ecuación diferencial es real, sería deseable, de ser posible, expresar la solución general de la Ec. (1) como una combinación lineal de soluciones de valores reales. Esto puede hacerse de la manera siguiente. Ya que $e^{(\lambda+i\mu)x}$ y $e^{(\lambda-i\mu)x}$ son soluciones de la Ec. (1), sus sumas y diferencias también son soluciones; así

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)x} + e^{(\lambda-i\mu)x} &= e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) + e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x) \\ &= 2e^{\lambda x} \cos \mu x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)x} - e^{(\lambda-i\mu)x} &= e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) - e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x) \\ &= 2ie^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \end{aligned}$$

son soluciones de la Ec. (1). Por lo tanto, despreciando a las constantes multiplicativas 2 y $2i$, respectivamente, las funciones

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \qquad e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \tag{10}$$

son soluciones de valores reales de la Ec. (1). Se puede mostrar fácilmente que

$$W(e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x) = \mu e^{2\lambda x},$$

y como esto nunca es nulo, esas dos funciones constituyen un conjunto

fundamental de soluciones de valores reales. De aquí que podemos expresar la solución general de la Ec. (1) en la forma

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo. Encontrar la solución general de

$$y'' + y' + y = 0. \qquad (11)$$

La ecuación auxiliar es

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

y las raíces son

$$r = \frac{-1 \pm (1 - 4)^{1/2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

por lo tanto, la solución general de la Ec. (11) es

$$y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Considérense otra vez las soluciones de valores reales $e^{\lambda x} \cos \mu x$ y $e^{\lambda x}$ sen μx de la Ec. (1). Nótese que estas funciones son las partes real e imaginaria, respectivamente, de la solución de valores complejos $e^{(\lambda + i\mu)x}$. Esto es justamente un caso especial de un resultado general que depende solamente del hecho de que los coeficientes en la ecuación diferencial son de valor real, independientemente de que sean constantes o no. Expresamos este resultado como un Teorema.

Teorema 3.9. Sean las funciones de valores reales p y q continuas en el intervalo abierto $\alpha < x < \beta$. Sea $y = \phi(x) = u(x) + iv(x)$ una solución de valores complejos de la ecuación diferencial

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (12)$$

donde u y v son funciones de valores reales. Entonces u y v también son soluciones de la ecuación diferencial (12).

Para probar este Teorema, obsérvese que

$$\begin{aligned} L[u + iv] &= (u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) \\ &= (u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \\ &= L[u] + iL[v] = 0. \end{aligned}$$

Pero un número complejo es cero, si y sólo si, tanto su parte real como su parte imaginaria son cero; por lo tanto $L[u] = 0$ y $L[v] = 0$.

Si las constantes a, b y c de la Ec. (1) son números complejos, aun es posible encontrar soluciones de la forma e^{rx}, donde r debe satisfacer a

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Sin embargo, las raíces de la ecuación auxiliar serán, en general, números complejos, pero no complejos conjugados, y las soluciones correspondientes a la Ec. (1) serán valores complejos. Esto es discutido brevemente en los problemas 13, 14 y 15.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 8 determinar la solución general de la ecuación diferencial dada. Si se dan condiciones iniciales encontrar la solución que las satisfaga.

1. $y'' - 2y' + 2y = 0$
2. $y'' - 2y' + 6y = 0$
3. $y'' + 2y' - 8y = 0$
4. $y'' + 2y' + 2y = 0$
5. $9y'' - 6y' + y = 0$
6. $y'' + 6y' + 13y = 0$
7. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
9. Verificar que $W(e^{\lambda x} \cos \mu x, e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x) = \mu e^{2\lambda x}$.

10. Mostrar que si a, b y c son positivas, entonces todas las soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ tienden a cero cuando $x \to \infty$.

11. Mostrar que la solución general de

$$y'' + y = 0$$

puede ser expresada como $y = A_1 \cos(x + \delta_1)$ o como $y = A_2 \operatorname{sen}(x + \delta_2)$, donde A_2 y δ_2 son constantes.

12. Para r un número real, mostrar que

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^r = \cos rx + i \operatorname{sen} rx.$$

Para r entera positiva, esto es conocido como la fórmula de De Moivre (1667-1754). Use este resultado para obtener las fórmulas del doble del ángulo sen $2x = 2$ sen $x \cos x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

*13. Mostrar que cualquier número complejo $a + ib$ puede escribirse en la forma $Ae^{i\theta}$, donde A y θ son números reales positivos, y $0 \leq \theta < 2\pi$. *Sugerencia:* Desarrolle $Ae^{i\theta}$ usando las fórmulas de Euler y resuelva para A y θ en términos de a y b.

*14. Si definimos a las dos posibles raíces cuadradas de un número complejo $Ae^{i\theta}$, como $\pm A^{1/2}e^{i\theta/2}$, calcular las raíces cuadradas de $1 + i$, $1 - i$, i.

*15. Resolver

a) $y'' + iy' + 2y = 0$ b) $y'' + 2y' + iy = 0$

Nótese que las raíces de la ecuación auxiliar no son complejas conjugadas. ¿La parte real o la parte imaginaria de alguna de las soluciones satisfacen a la ecuación diferencial?

*16. Ahora que ya conocemos cómo se resuelve la ecuación de segundo orden con coeficientes constantes, determinemos las condiciones para las cuales la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ pueda ser transformada en una que

tenga coeficientes constantes por un apropiado cambio de variable independiente. Sea z la nueva variable independiente, $z = u(x)$, donde, por el momento, las relaciones entre z y x no están especificadas. Mostrar que

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{dy}{dz}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{dy}{dz}$$

b) La ecuación diferencial se transforma en

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz} + q(x)y = 0$$

c) La ecuación de la parte *b*) tendrá coeficientes constantes si escogemos a

$$z = u(x) = \int^x [q(t)]^{1/2}\, dt,$$

en caso de que

$$\frac{z'' + p(x)z'}{q(x)} = \frac{q'(x) + 2p(x)q(x)}{2[q(x)]^{3/2}}$$

sea una constante.

Por lo tanto concluir que una condición necesaria y suficiente para transformar a $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en una ecuación con coeficientes constantes por un cambio de la variable independiente es que la función $(q' + 2pq)/q^{3/2}$ sea constante.

*17. Usando el resultado del problema 16, determine si cada una de las ecuaciones siguientes puede transformarse en una ecuación de coeficientes constantes por un cambio de variable independiente. De ser así, encontrar la solución general de la ecuación dada.

a) $y'' + xy' + e^{-x^2}y = 0, \qquad -\infty < x < \infty$

b) $y'' + 3xy' + x^2y = 0, \qquad -\infty < x < \infty$

c) $xy'' + (x^2 - 1)y' + x^3y = 0, \qquad 0 < x < \infty$

*18. Mostrar, usando el resultado del problema 16, que siempre es posible transformar una ecuación de la forma

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \qquad x > 0,$$

donde α y β son constantes reales, en una ecuación de coeficientes o constantes haciendo $z = e^x$. A una ecuación de este tipo se le llama ecuación de Euler; y será discutida en la sección 4.4. Encontrar la solución general de $x^2y'' + xy' + y = 0, x > 0$.

3.6 EL PROBLEMA DE LA NOHOMOGENEIDAD

En la sección anterior de este capítulo hemos discutido la teoría general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden, y para el caso de coeficientes constantes hemos mostrado cómo construir las soluciones. Ahora pondremos nuestra atención para resolver la ecuación diferencial nohomogénea

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{1}$$

A través de toda la discusión supondremos que las funciones p, q y g son continuas en el intervalo que nos interesa.

En la ingeniería moderna el problema de resolver la Ec. (1) es llamado a menudo como un problema de entrada y salida. Suponiendo por el momento que la ecuación diferencial (1) representa un cierto sistema mecánico o eléctrico, es natural llamar a la solución $y = \phi(x)$ como la salida del sistema. Los coeficientes p y q están determinados por el mecanismo físico. El problema de resolver la Ec. (1) para diferentes términos nohomogéneos g, funciones de entrada, corresponde a determinar la salida del sistema para diferentes funciones de entrada.

Antes de considerar casos especiales de la Ec. (1), probaremos varios resultados generales simples pero muy útiles que simplificarán el trabajo subsecuente.

Teorema 3.10. La diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación diferencial (1),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

es una solución de la correspondiente ecuación diferencial homogénea

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2}$$

Para probar este Teorema suponemos que las funciones u_1 y u_2 son soluciones de la Ec. (1). Entonces

$$L[u_1] = g,$$

y

$$L[u_2] = g.$$

Substrayendo la segunda ecuación de la primera, obtenemos

$$L[u_1] - L[u_2] = 0,$$

o, como L es un operador lineal,

$$L[u_1 - u_2] = 0,$$

el cual es el resultado deseado. Con la ayuda de este Teorema podemos probar el siguiente Teorema importante.

Teorema 3.11. Cualquier solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial lineal nohomogénea (1)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

puede expresarse como

$$\phi(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3}$$

donde y_p es cualquier solución de la ecuación nohomogénea y y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente.

Para probar este Teorema, obsérvese que de acuerdo con el Teorema 3.10 $\phi - y_p$ es una solución de la ecuación homogénea. Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 3.4 de la sección 3.2, $\phi - y_p$ puede expresarse como una combinación lineal de y_1 y y_2, lo cual establece el Teorema.

Se acostumbra llamar a la combinación lineal (3) como la *solución general* de la Ec. (1).

Por consiguiente, para encontrar la solución general de la Ec. (1) debemos encontrar la solución general de la ecuación homogénea (2) y luego encontrar *cualquier* solución de la ecuación nohomogénea. Como habíamos anticipado (ver sección 3.1) la solución general de la Ec. (1) involucra dos constantes arbitrarias, y de aquí que para especificar una solución única de la Ec. (1) es necesario dar dos condiciones adicionales, es decir, las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y'_0$.

La solución general de la ecuación homogénea (2) se le llama a menudo como la *solución complementaria* y se denota por y_c. De aquí que $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Una solución de la ecuación nohomogénea y_p usualmente se le llama una *solución particular.** Nótese que y_p no es única ya que si Y es una solución de la ecuación nohomogénea entonces Y más un múltiplo de y_1 o de y_2 aún es una solución de la ecuación nohomogénea. Del Teorema 3.11 se sigue que la solución general de la ecuación nohomogénea (1) es

$$y = y_c(x) + y_p(x). \tag{4}$$

En muchos problemas el término nohomogéneo g puede ser muy complicado; sin embargo, si g puede expresarse como la suma de un número finito de funciones, podemos hacer uso de la linealidad de la ecuación diferencial para reemplazar el problema original por varios casos más simples. Por ejemplo, supongamos que es posible escribir a $g(x)$ como $g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_m(x)$; entonces la Ec. (1) se transforma en

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_m(x). \tag{5}$$

Si podemos encontrar soluciones particulares y_p de las ecuaciones diferenciales

$$L[y] = g_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

entonces, por substitución directa se sigue que

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_m}(x) \tag{7}$$

es una solución particular de la Ec. (5). Por lo tanto la solución general de la Ec. (5) es de la forma

$$y = y_c(x) + y_{p_1}(x) + \cdots + y_{p_m}(x). \tag{8}$$

En general es más fácil encontrar soluciones de las Ecs. (6) y sumar los resultados, que tratar de resolver la Ec. (5) directamente. Este método de construcción de la solución de un problema complicado por la suma de soluciones de problemas más simples se conoce como el método de superposición.

* Esto es un uso bastante desafortunado, ya que el término solución particular puede referirse también a una solución que satisface las condiciones iniciales prescritas. Se entiende generalmente el significado a partir del contexto.

Ejemplo. Encontrar la solución general de

$$y'' + 4y = 1 + x + \operatorname{sen} x. \tag{9}$$

Primero considérese la ecuación homogénea correspondiente, $y'' + 4y = 0$. La substitución de $y = e^{rx}$ produce la ecuación auxiliar $r^2 + 4 = 0$. De aquí la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$$

Para determinar una solución particular de la Ec. (9) superponemos soluciones particulares de $y'' + 4y = 1$, $y'' + 4y = x$ y $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$. Fácilmente podemos verificar que $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}x$, y $\frac{1}{3}\operatorname{sen} x$ son soluciones particulares de esas ecuaciones, respectivamente. Por lo tanto la solución general de la Ec. (9) es

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} x.$$

3.6.1 EL METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Pueden usarse varios métodos para obtener las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales nohomogéneas de segundo orden. Cuando es aplicable, el método de coeficientes indeterminados es uno de los más simples. Básicamente el método consiste en tratar de adivinar inteligentemente la forma de la solución particular y entonces substituir esta función, que en general involucra uno o más coeficientes desconocidos, en la ecuación diferencial. Para que este método sea satisfactorio debemos ser capaces de determinar los coeficientes desconocidos de manera que la función realmente satisfaga a la ecuación diferencial.

Claramente, tal método depende de una manera considerable de la habilidad para descubrir con anticipación la forma general de una solución particular. Se puede decir muy poco de una ecuación diferencial completamente arbitraria. Sin embargo, si la ecuación es de la forma

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x), \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes reales, y el término nohomogéneo $g(x)$ es una función exponencial ($e^{\alpha x}$) o un polinomio ($a_0x^n + \cdots + a_n$), o una función de carácter senoidal ($\operatorname{sen} \beta x$ o $\cos \beta x$), entonces pueden darse reglas definidas para la determinación de una solución particular por el método de coeficientes indeterminados. Estas reglas cubren también el caso más general en el que $g(x)$ es un producto de términos de los tipos anteriores, tal como

$$g(x) = e^{\alpha x}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)\begin{cases}\cos \beta x\\ \operatorname{sen} \beta x.\end{cases} \tag{2}$$

Debe notarse que cualquier otro producto de exponenciales, polinomios, senos y cosenos, es equivalente a una suma de términos del tipo (2). En particular, el producto de dos o más términos senoidales puede reducirse siempre, usando identidades trigonométricas, a una suma de términos senoidales individuales. Podemos tratar el caso en que $g(x)$ es una suma de términos del tipo (2), usando el método de superposición que se discutió en la última sección. Para términos nohomogéneos más generales que (2), o para ecuaciones con coeficientes variables, el método de coeficientes indeterminados raramente es útil.

Antes de discutir el procedimiento general, vamos a considerar unos cuantos métodos simples que ilustrarán el método.

Ejemplo 1. Encontrar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \operatorname{sen} x. \tag{3}$$

Queremos encontrar una función y_p tal que la suma de su segunda derivada menos tres veces su primera derivada, menos cuatro veces la función misma es igual a 2 sen x. No hay mucha esperanza de que tratando con funciones tales como $\ln x$, e^x o x^2 para $y_p(x)$ se encuentre la solución, ya que no importa cómo se combinen tales funciones y sus derivadas, es imposible obtener sen x. Las funciones que obviamente deben considerarse para $y_p(x)$ son sen x y cos x. Entonces *suponemos* que $y_p(x)$ es de la forma

$$y_p(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x,$$

donde A y B son, por el momento, constantes desconocidas. Entonces

$$y_p'(x) = -A \operatorname{sen} x + B \cos x,$$
$$y_p''(x) = -A \cos x - B \operatorname{sen} x.$$

Substituyendo y, y' y y'' en la Ec. (3) y reuniendo términos se obtiene

$$(-A - 3B - 4A) \cos x + (-B + 3A - 4B) \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x.$$

Esta ecuación se satisfará idénticamente si y sólo si

$$-5A - 3B = 0, \qquad 3A - 5B = 2.$$

Por lo tanto $A = 3/17$, $B = -5/17$, y una solución particular de la Ec. (3) es

$$y_p(x) = \tfrac{1}{17}(3 \cos x - 5 \operatorname{sen} x).$$

Ejemplo 2. Encontrar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2. \tag{4}$$

Es natural intentar $y_p(x) = Ax^2$ donde A es una constante que debe determinarse. Entonces $y'_p(x) = 2Ax$, $y''_p(x) = 2A$, y substituyendo en la Ec. (4) se obtiene

$$2A - 6Ax - 4Ax^2 = 4x^2.$$

Si esta ecuación se satisface para todas las potencias iguales de los coeficientes de x, estos coeficientes, a cada lado de la ecuación, deben ser idénticos. Esto nos conduce a tres ecuaciones y no hay forma de elegir A tal que se satisfagan las tres. Por lo tanto es imposible encontrar una solución particular de la Ec. (4) de la forma Ax^2.

Sin embargo, si pensamos al término nohomogéneo en la Ec. (4) $(4x^2)$ como el polinomio $4x^2 + 0x + 0$, parece entonces razonable suponer que la forma de $y_p(x)$ es $Ax^2 + Bx + C$, donde A, B y C son constantes a determinarse. Substituyendo y, y' y y'' en la Ec. (4) e igualando potencias iguales de x en ambos miembros de la ecuación, obtenemos tres ecuaciones nohomogéneas, algebraicas, lineales y simultáneas para A, B y C. La solución es $A = -1$, $B = 3/2$, y $C = -13/8$; por lo tanto una solución particular de la Ec. (4) es

$$y_p(x) = -x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{13}{8}.$$

El estudiante puede sorprenderse de saber qué pasaría si un polinomio de grado alto, tal como $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ se igualara a $y_p(x)$. La respuesta es que todos los coeficientes más allá del término cuadrático se harían cero. De aquí que con ciertas excepciones que mencionaremos después, es innecesario suponer para $y_p(x)$ un polinomio de un grado mayor que el grado del polinomio en el término nohomogéneo.

Ejemplo 3. Encontrar una solución particular de la ecuación

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}. \tag{5}$$

Siguiendo el razonamiento usado antes supongamos $y_p(x) = Ae^{-x}$. Substituyendo en la Ec. (5) nos da

$$(A + 3A - 4A)e^{-x} = e^{-x},$$

ó

$$0 \cdot Ae^{-x} = e^{-x},$$

lo que no permite la determinación de A. Por lo tanto la solución particular no es de la forma Ae^{-x}. La dificultad en este caso estriba en el hecho de que e^{-x} es una solución de la ecuación diferencial homogénea; por lo tanto, las operaciones realizadas sobre el miembro izquierdo de la Ec. (5), cuando se aplican a cualquier constante múltiplo de e^{-x} dan cero. Esto hace surgir la pregunta general de si el método de coeficientes indeterminados puede aún usarse, si el término nohomogéneo es una solución de la ecuación homogénea. Veremos pronto que la respuesta a esta pregunta es sí.

Volvamos ahora a los casos generales en los que $g(x)$ es de la forma

$$g(x) = \begin{cases} P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \\ e^{\alpha x}P_n(x) \\ e^{\alpha x}P_n(x) \operatorname{sen} \beta x \\ e^{\alpha x}P_n(x) \cos \beta x. \end{cases}$$

Si $g(x) = P_n(x)$, entonces la Ec. (1) se transforma en

$$ay'' + by' + cy = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n. \qquad (6)$$

Para obtener una solución particular suponemos

$$y_p(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n. \qquad (7)$$

Substituyendo en la Ec. (6) obtenemos

$$a[n(n-1)A_0x^{n-2} + \cdots + 2A_{n-2}] + b(nA_0x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}) + c(A_0x^n + \cdots + A_n) = a_0x^n + \cdots + a_n. \qquad (8)$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales de x nos da

$$cA_0 = a_0,$$
$$cA_1 + nbA_0 = a_1,$$
$$\vdots$$
$$cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} = a_n.$$

Siempre y cuando $c \neq 0$, la solución de la primera ecuación es $A_0 = a_0/c$, y las ecuaciones restantes determinan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sucesivamente. Si $c = 0$, pero $b \neq 0$, el polinomio del miembro izquierdo de la Ec. (8) es de grado $n-1$, y no podemos satisfacer la Ec. (8). Para asegurar que $ay''_p(x) + by'_p(x)$ será un polinomio de grado n debemos elegir $y_p(x)$ como un polinomio de grado $n+1$. De aquí que supongamos

$$y_p(x) = x(A_0x^n + \cdots + A_n).$$

No hay término constante en esta expresión para $y_p(x)$, pero no hay necesidad de incluir tal término cuando $c = 0$, ya que entonces una constante es una solución de la ecuación diferencial homogénea. Como $b \neq 0$ tenemos $A_0 = a_0/b(n+1)$, y los coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ pueden determinarse de forma similar. Si tanto c como b se anulan, podríamos suponer

$$y_p(x) = x^2(A_0x^n + \cdots + A_n).$$

El término $ay''_p(x)$ da lugar a un término de grado n, y podemos proceder como antes.* Otra vez se omiten la constante y los términos lineales en $y_p(x)$ ya que en este caso ambos son soluciones de la ecuación homogénea.

Si $g(x)$ es de la forma $e^{\alpha x}P_n(x)$ el problema de determinar una solución particular de

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x}P_n(x) \qquad (9)$$

* El estudiante deberá notar que en el caso $c = 0$, $b \neq 0$, la Ec. (6) puede integrarse una vez dando una ecuación lineal de primer orden cuyo término nohomogéneo es un polinomio de grado $n+1$. Una solución particular de esta ecuación puede encontrarse entonces por el método de coeficientes indeterminados con $y_p(x)$ un polinomio de grado $n+1$. Si tanto c como b se anulan, entonces la Ec. (6) puede integrarse inmediatamente, la solución será un polinomio de grado $n+2$.

puede reducirse a resolver la ecuación anterior.* Dado

$$y_p(x) = e^{\alpha x}u(x);$$

entonces

$$y_p'(x) = e^{\alpha x}[u'(x) + \alpha u(x)]$$

y

$$y_p''(x) = e^{\alpha x}[u''(x) + 2\alpha u'(x) + \alpha^2 u(x)].$$

Substituyendo y, y' y y'' en la Ec. (9), cancelando el factor $e^{\alpha x}$, y reuniendo términos tenemos

$$au''(x) + (2a\alpha + b)u'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(x) = P_n(x). \qquad (10)$$

La determinación de una solución particular de la Ec. (10) es precisamente el problema que acabamos de resolver. Si $a\alpha^2 + b\alpha + c$ no se anula suponemos $u(x) = (A_0x^n + \cdots + A_n)$, y por lo tanto una solución particular de la Ec. (9) es de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n). \qquad (11)$$

Por otra parte, si $a\alpha^2 + b\alpha + c$ se anula pero $(2a\alpha + b)$ no, debemos tomar $u(x)$ de la forma $x(A_0x^n + \cdots + A_n)$. La forma correspondiente para $y_p(x)$ es x veces la expresión del miembro derecho de la Ec. (11). Deberá notarse que el anulamiento de $a\alpha^2 + b\alpha + c$ implica que $e^{\alpha x}$ es una solución de la ecuación homogénea. Si tanto $a\alpha^2 + b\alpha + c$ como $2a\alpha + b$ se anulan (y esto implica que tanto $e^{\alpha x}$ como $xe^{\alpha x}$ son soluciones de la ecuación homogénea), entonces la forma correcta de $u(x)$ es $x^2(A_0x^n + \cdots + A_n)$; y por lo tanto $y_p(x)$ es x^2 veces la expresión del miembro derecho de la Ec. (11).

Si $g(x)$ es de la forma $e^{\alpha x}P_n(x)$ sen βx podemos reducir este problema al anterior recordando que sen $\beta x = (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})/2i$. Por lo tanto $g(x)$ es de la forma

$$g(x) = P_n(x)\frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i}$$

y deberíamos elegir

$$y_p(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}(A_0x^n + \cdots + A_n) + e^{(\alpha-i\beta)x}(B_0x^n + \cdots + B_n),$$

o equivalentemente

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0x^n + \cdots + A_n)\cos\beta x + e^{\alpha x}(B_0x^n + \cdots + B_n)\,\text{sen}\,\beta x.$$

Usualmente se prefiere la última forma. Si $\alpha \pm i\beta$ satisface la ecuación auxiliar correspondiente a la ecuación homogénea debemos, por supuesto, multiplicar cada uno de los polinomios por x para aumentar su grado en uno.

Si el término nohomogéneo involucra expresiones tales como $e^{\alpha x}$ cos βx y $e^{\alpha x}$ sen βx es conveniente tratarlas juntas, ya que individualmente dan lugar a

* Uno de los artificios favoritos de los matemáticos es reducir un problema nuevo a otro que ya se sabe cómo resolver.

la misma forma para una solución particular. Por ejemplo, si $g(x) = x \operatorname{sen} x + 2\cos x$, la forma para $y_p(x)$ sería

$$(A_0x + A_1)\operatorname{sen} x + (B_0x + B_1)\cos x$$

siempre y cuando $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ no fueran soluciones de la ecuación homogénea.

Podemos resumir los resultados precedentes en la tabla 3.1. Estos resultados, asociados con el hecho de que puede usarse el principio de superposición para encontrar la solución particular correspondiente cuando el término nohomogéneo consiste de la suma de varias funciones, nos permite resolver bastante rápidamente una amplia clase de ecuaciones diferenciales nohomogéneas, lineales, con coeficientes constantes.

TABLA 3.1 La solución particular de $ay'' + by' + cy = g(x)$

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$	$x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\operatorname{sen}\beta x\\ \cos\beta x\end{cases}$	$x^s[(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha x}\cos\beta x + (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x]$

Aquí s es el entero no negativo más pequeño ($s = 0$, 1, ó 2) que asegura que ningún término en $y_p(x)$ es una solución de la ecuación homogénea correspondiente.

Si la ecuación diferencial tiene coeficientes variables, o el término nohomogéneo es más complicado que en la Ec. (2), generalmente es mejor usar el método de variación de parámetros, que se discute en la sección siguiente.

Ejemplo 4. Usando el método de coeficientes indeterminados, determínese la forma correcta para $y_p(x)$ para la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = xe^x + x\operatorname{sen} 2x. \tag{12}$$

Usamos el principio de superposición, y consideramos los problemas

$$y'' + 4y = xe^x \tag{13}$$

y

$$y'' + 4y = x\operatorname{sen} 2x \tag{14}$$

separadamente. Para el primer problema supondremos que $y_p(x) = (A_0x + A_1)e^x$. Ya que e^x no es una solución de la ecuación homogénea, no es necesario hacer nada más. Para el segundo problema supondremos $y_p(x) = (B_0x + B_1)\cos 2x + (C_0x + C_1)\operatorname{sen} 2x$, pero como $\cos 2x$ y $\operatorname{sen} 2x$ son soluciones de la ecuación homogénea, es necesario multiplicar sus coeficientes polinomiales por x. Por lo tanto, la forma correcta para $y_p(x)$ para la Ec. (12) es

$$y_p(x) = (A_0x + A_1)e^x + (B_0x^2 + B_1x)\cos 2x + (C_0x^2 + C_1x)\operatorname{sen} 2x.$$

Para determinar los coeficientes en esta expresión es más fácil calcular la solución particular correspondiente a xe^x, en la Ec. (13), y a $x \operatorname{sen} 2x$ en la Ec. (14), separadamente, que tratar de hacer toda el álgebra al mismo tiempo.

PROBLEMAS

Usando el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular de la ecuación nohomogénea, encuéntrese la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales. Cuando se especifique, encuéntrese la solución que satisface las condiciones iniciales dadas.

1. $y'' + y' - 2y = 2x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$
2. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$
3. $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 2$
4. $y'' + 2y' = 3 + 4\operatorname{sen} 2x$
5. $y'' + 9y = x^2e^{3x} + 6$
6. $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 1$
7. $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\operatorname{sen} x$
8. $y'' + y = 3\operatorname{sen} 2x + x\cos 2x$
9. $y'' + 2y' + y = e^x\cos x$
10. $u'' + \omega_0^2u = \cos \omega t$, $\quad \omega \neq \omega_0$
11. $u'' + \omega_0^2u = \cos \omega_0 t$,
12. $u'' + \mu u' + \omega_0^2u = \cos \omega t$ $\quad \mu^2 - 4\omega_0^2 < 0$
13. $y'' + y' + y = \operatorname{sen}^2 x$
14. $y'' + y' + 4y = 2\operatorname{senh} x$. $\quad$ *Indicación:* $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$
15. $y'' - y' - 2y = \cosh 2x$. $\quad$ *Indicación:* $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$

En los problemas 16 a 22 determínese una forma adecuada para $y_p(x)$ si se usara el método de coeficientes indeterminados. No se calculen las constantes.

16. $y'' + 3y' = 2x^4 + x^2e^{-3x} + \operatorname{sen} 3x$
17. $y'' + y = x(1 + \operatorname{sen} x)$
18. $y'' - 5y' + 6y = e^x\cos 2x + e^{2x}(3x + 4)\operatorname{sen} x$
19. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 2e^{-x}\cos x + 4e^{-x}x^2\operatorname{sen} x$
20. $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x\operatorname{sen} 2x$
21. $y'' + 4y = x^2\operatorname{sen} 2x + (6x + 7)\cos 2x$
22. $y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2 + 1)\operatorname{sen} 2x + 3e^x\cos x + 4e^x$
23. Determínese la solución general de

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \operatorname{sen} m\pi x$$

donde $\lambda > 0$, y $\lambda \neq m\pi$, $m = 1, 2, \ldots, N$.

24. Si a, b y c son positivos y Y_1 y Y_2 son soluciones de

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

muéstrese que $Y_1(x) - Y_2(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. ¿Cuál es el comportamiento de la solución del problema 10 para t grande? ¿Del problema 11?

25. En muchos problemas físicos la función de entrada, esto es, el término nohomogéneo, puede estar especificado por fórmulas diferentes en diferentes períodos de tiempo. Como un ejemplo simple de tal problema determínese la solución $y = \phi(t)$ de

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ \pi e^{\pi - t}, & t > \pi, \end{cases}$$

que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$, y el requerimiento de que y y y' sean continuas para toda t. Grafíquese el término nohomogéneo y la solución $y = \phi(t)$ en función del tiempo.
Sugerencia: Resuélvase primero el problema de valores iniciales para $t \leq \pi$, después resuelva para $t > \pi$ determinando las constantes arbitrarias para las que y y y' son continuas en $t = \pi$.

26. Determínese una forma adecuada para $y_p(x)$ para la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x}(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) \operatorname{senh} \beta x, \qquad \beta \neq 0,$$

(i) Si ni $e^{(\alpha+\beta)x}$ ni $e^{(\alpha-\beta)x}$ es una solución de la ecuación homogénea.

(ii) Si $e^{(\alpha+\beta)x}$ pero no $e^{(\alpha-\beta)x}$ es una solución de la ecuación homogénea.

(iii) Si tanto $e^{(\alpha+\beta)x}$ como $e^{(\alpha-\beta)x}$ son soluciones de la ecuación homogénea.

(iv) En cada uno de los casos (i)-(iii) encontrar expresiones adecuadas para $y_p(x)$ que solamente involucren productos de $e^{\alpha x}$, $\cosh \beta x$, $\operatorname{senh} \beta x$, y polinomios.

3.6.2 EL METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

En la sección 3.6.1 discutimos un método simple para determinar soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales nohomogéneas con coeficientes constantes, siempre y cuando el término nohomogéneo sea de una forma adecuada. En esta sección consideraremos un *método general* de determinar una solución particular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{1}$$

donde las funciones p, q y g son continuas sobre el intervalo de interés. Para usar este método, conocido como el método de variación de parámetros,* es necesario conocer un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2}$$

* El método también se conoce como el método de Lagrange en honor al matemático francés, J. L. Lagrange (1736-1813) quien lo usó en 1774. Lagrange es famoso por su trabajo en mecánica celeste, mecánica analítica, y análisis matemático. A la edad de 25 fue reconocido como uno de los más grandes matemáticos vivientes.

Supondremos que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2). Entonces la solución general de la Ec. (2) es

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

El método de variación de parámetros involucra el reemplazo de las constantes c_1 y c_2 por funciones u_1 y u_2. Buscamos entonces determinar dos funciones u_1 y u_2 tales que

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{3}$$

satisfaga la ecuación diferencial nohomogénea (1). La importancia de este método es debida al hecho de que es posible determinar las funciones u_1 y u_2 en una forma simple. Se requieren dos condiciones para determinar u_1 y u_2. Una condición sobre u_1 y u_2 descansa sobre el hecho de que y_p debe satisfacer la ecuación (1). Se puede imponer una segunda condición arbitrariamente, y seleccionarla de tal manera que facilite los cálculos. Derivando la Ec. (3) tenemos

$$y_p' = (u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1 y_1' + u_2 y_2'). \tag{4}$$

Como acabamos de indicar, simplificamos esto requiriendo que u_1 y u_2 satisfagan

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0. \tag{5}$$

Con esta condición sobre u'_1 y u'_2, y''_p está dada por

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''. \tag{6}$$

Nótese que solamente aparecen en la expresión para y''_p las primeras derivadas de u_1 y u_2. Substituyendo y'_p y y''_p en la Ec. (1) se obtiene

$$u_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + u_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g.$$

Los términos entre paréntesis se anulan ya que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea (2); de aquí que la condición de que y_p satisface la condición (1) conduce a la condición

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g. \tag{7}$$

Reescribiendo las Ecs. (5) y (7), tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$
$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g$$

para las dos funciones desconocidas u'_1 y u'_2. Resolviendo este sistema de ecuaciones se tiene

$$u_1' = \frac{-y_2 g}{W(y_1, y_2)}, \qquad u_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)}, \tag{8}$$

donde $W(y_1, y_2) = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$. Se puede dividir entre $W(y_1, y_2)$ porque y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y por lo tanto $W(y_1, y_2)$ no puede anularse en el intervalo. Integrando las Ecs. (8) y substituyendo en la Ec. (3) se obtiene una solución particular de la ecuación nohomogénea (1). Estableceremos este resultado en el Teorema siguiente.

Teorema 3.12. Si las funciones p, q y g son continuas sobre $\alpha < x < \beta$ y si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada con la ecuación diferencial (1)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

entonces una solución particular de la Ec. (1) *está dada por*

$$y_p(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\,dt + y_2(x)\int^x \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\,dt. \tag{9}$$

La Ec. (9) puede escribirse también como

$$y_p(x) = \int^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)}\,g(t)\,dt. \tag{10}$$

Nótese que en la Ec. (10) t es una variable muda de integración y x es la variable independiente.

Al usar el método de variación de parámetros para un problema particular, generalmente es más seguro substituir $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ y proceder como antes más bien que tratar de recordar cada fórmula (9) o (10). Debería mencionarse que mientras que las Ecs. (9) y (10) dan fórmulas para calcular $y_p(x)$, puede que no siempre sea fácil, o inclusive posible, evaluar estas integrales en forma cerrada. Sin embargo, aun en estos casos, las fórmulas para $y_p(x)$ nos darán un punto de partida para la evaluación numérica de $y_p(x)$, que en muchos casos será lo mejor que podamos hacer. Desde un punto de vista numérico es generalmente ventajoso tener una forma integral de la solución, ya que el cálculo numérico de una integral es, generalmente pero no siempre, considerablemente más fácil que la integración numérica directa de una ecuación diferencial.

Enfatizamos aquí otra vez, que al calcular una solución particular por el método de variación de parámetros, no es necesario que los coeficientes de la ecuación diferencial sean constantes; todo lo que se requiere es que conozcamos dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.

Ejemplo. Determínese la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y = \sec x, \qquad 0 < x < \pi/2. \tag{11}$$

Dos soluciones linealmente independientes de ecuación homogénea son $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \operatorname{sen} x$. Para una solución particular intentaremos

$$y_p(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x)\operatorname{sen} x.$$

Entonces

$$y_p'(x) = [-u_1(x)\operatorname{sen} x + u_2(x)\cos x] + [u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\operatorname{sen} x].$$

Poniendo los segundos paréntesis iguales a cero, derivando otra vez y substituyendo en la Ec. (11) se tiene

$$u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\operatorname{sen} x = 0,$$
$$-u_1'(x)\operatorname{sen} x + u_2'(x)\cos x = \sec x.$$

Resolviendo obtenemos

$$u_1'(x) = -\tan x, \qquad u_2'(x) = 1,$$
$$u_1(x) = \ln\cos x, \qquad u_2(x) = x.$$

De aquí que una solución particular de la Ec. (11) sea

$$y_p(x) = x\operatorname{sen} x + (\cos x)\ln\cos x,$$

y la solución general es

$$y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} x + (\cos x)\ln\cos x.$$

Podemos resumir los resultados de las secciones precedentes de este capítulo, que tienen que ver con los métodos para resolver la ecuación diferencial (1)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

donde las funciones p, q y g son continuas sobre $\alpha < x < \beta$ como sigue:

1. Si p y q son constantes siempre es posible encontrar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. Una solución particular puede obtenerse entonces por el método de variación de parámetros, y por lo tanto se puede conocer la solución completa. Si g es de una forma apropiada probablemente será más fácil usar el método de coeficientes indeterminados más bien que el de variación de parámetros para determinar la solución particular.

2. Si p y q no son constantes, no hay forma general de resolver la Ec. (1) en términos de un número finito de funciones elementales.* Sin embargo, si se puede encontrar una solución de la ecuación homogénea, en principio se puede obtener una segunda solución reduciendo el orden de la ecuación. Entonces puede obtenerse una solución particular por el método de variación de parámetros, y de aquí se conoce la solución completa. Realmente ambos cálculos pueden hacerse al mismo tiempo. Si sabemos una solución de la ecuación homogénea, podemos resolver la ecuación no homogénea por el método de reducción de orden y obtener tanto una solución particular como una segunda solución linealmente independiente de la ecuación homogénea. Esto está ilustrado en los problemas 13 y 14. Por lo tanto, en general, el problema de resolver la Ec. (1) descansa sobre la posibilidad de encontrar *una* solución de la ecuación homogénea correspondiente.

* Los métodos que involucran series infinitas, que son útiles para una gran clase de problemas que involucran coeficientes variables, se discuten en el capítulo 4. Los métodos numéricos se discuten en el capítulo 7.

PROBLEMAS

Determinar una solución particular, usando el método de variación de parámetros, de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$
2. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$
3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$
4. $y'' + y = \tan x, \quad 0 < x < \pi/2$
5. $y'' + 9y = 9\sec^2 3x, \quad 0 < x < \pi/6$
6. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}/x^2, \quad x > 0$
7. $y'' + 4y = 3\csc 2x, \quad 0 < x < \pi/2$

8. Dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden $1/2$,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0, \quad x > 0,$$

son $x^{-1/2}$ sen x y $x^{-1/2}$ cos x. Encuéntrese la solución general de

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 3x^{3/2}\operatorname{sen} x, \quad x > 0.$$

9. Verifíquese que e^x y x son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2e^{-x}, \quad 0 < x < 1,$$

y encuéntrese la solución general.

10. Encuéntrese una fórmula para una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = g(x).$$

11. Encuéntrese una fórmula para una solución particular de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = g(x), \quad x > 0.$$

(Ver problema 8.)

*12. Considérese el problema de resolver el problema de valores iniciales

$$y'' + y = g(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(i) Mostrar que la solución general de $y'' + y = g(x)$ es

$$y = \phi(x) = \left(c_1 - \int_\alpha^x g(t)\operatorname{sen} t\,dt\right)\cos x + \left(c_2 + \int_\beta^x g(t)\cos t\,dt\right)\operatorname{sen} x$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y α y β son cualesquiera puntos convenientemente elegidos.

(ii) Usando (i) mostrar que $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ si

$$c_1 = \int_\alpha^0 g(t)\operatorname{sen} t\,dt, \qquad c_2 = -\int_\beta^0 g(t)\cos t\,dt;$$

y por lo tanto que la solución del anterior problema de valores iniciales para una $g(x)$ arbitraria puede escribirse como

$$y = \phi(x) = \int_0^x g(t)\operatorname{sen}(x - t)\,dt.$$

Nótese que esta ecuación da una fórmula para calcular la solución del problema de valores iniciales original para cualquier término nohomogéneo dado, $g(x)$. La función ϕ no solamente satisfará la ecuación diferencial sino que también satisfará *automáticamente* las condiciones iniciales. Si pensamos a x como el tiempo, la fórmula muestra también la relación entre la entrada $g(x)$ y la salida $\phi(x)$. Además, vemos que la salida al tiempo x_0 depende solamente del comportamiento de la entrada desde el tiempo inicial 0 al tiempo de interés x_0. Esta integral se conoce a menudo como la *convolución* de sen x y $g(x)$.

(iii) Ahora que tenemos la solución de la ecuación diferencial lineal nohomogénea, que satisface las condiciones iniciales homogéneas, podemos resolver el mismo problema con condiciones iniciales nohomogéneas, superponiendo una solución de la ecuación homogénea que satisfaga a las condiciones iniciales nohomogéneas. Mostrar que la solución de $y'' + y = g(x)$ con $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ es

$$y = \phi(x) = \int_0^x g(t)\operatorname{sen}(x - t)\,dt + y_0\cos x + y_0'\operatorname{sen} x.$$

13. Supuesto que se conoce una solución de la ecuación homogénea, la ecuación nohomogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad \text{(i)}$$

puede resolverse también por el método de la reducción de orden (ver sección 3.4). Supóngase que y_1 es una solución conocida de la ecuación homogénea.

a) Mostrar que $y = y_1(x)v(x)$ es una solución de la Ec. (1) supuesto que v satisface

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' = g. \qquad \text{(ii)}$$

b) La ecuación (ii) es una ecuación lineal de primer orden para v'. Mostrar que la solución es

$$y_1^2(x)h(x)v'(x) = \int^x y_1(s)h(s)g(s)\,ds + k,$$

donde $h(x) = \exp\left[\int^x p(s)\,ds\right]$ y k es una constante.

c) Usando la parte *b*) mostrar que la solución general de la Ec. (i) es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_1(x)\int^x \frac{ds}{y_1^2(s)h(s)} + y_1(x)\int^x \frac{1}{y_1^2(s)h(s)}\left[\int^s y_1(t)h(t)g(t)\,dt\right] ds.$$

14. Usando el procedimiento desarrollado en el problema 13, resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^2, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x$

b) $x^2y'' + 7xy' + 5y = x, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1}$

3.7 VIBRACIONES MECANICAS

En las secciones 3.1 a 3.6.2 de este capítulo se desarrollaron métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden. Encontramos que cuando la ecuación diferencial tiene coeficientes constantes puede

resolverse de una manera directa. Hay dos importantes áreas de aplicación de esta teoría en los campos de las oscilaciones mecánicas y eléctricas, donde un gran número de fenómenos están gobernados por ecuaciones de la forma

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = F(t). \tag{1}$$

Aquí m, c y k son constantes, F es una función dada, y $u = \phi(t)$ representa la respuesta de un cierto sistema físico como función del tiempo t. En particular, la ecuación gobierna el movimiento de una masa vibrante que se encuentra en el extremo de un resorte vertical. La deducción de la Ec. (1) para este problema vale la pena hacerlo con mucho detalle ya que los principios en ella involucrados son comunes a muchos problemas.

Considérese primero el caso del alargamiento estático de un resorte de longitud natural l, debido a la carga de una masa m. Supóngase que Δl denota la elongación; ver figura 3.1. Las fuerzas que actúan sobre la masa son la

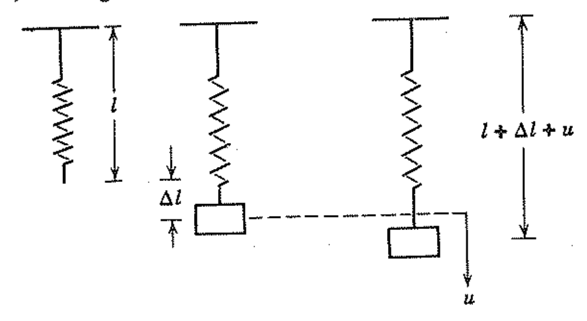


FIGURA 3.1

fuerza de la gravedad actuando hacia abajo, $mg = w$, donde g es la aceleración debida a la gravedad y w es el peso de la masa; y la fuerza del resorte actuando hacia arriba. Ya que la masa está en equilibrio en esta posición, estas fuerzas son numéricamente iguales. Si el desplazamiento Δl es pequeño comparado a la longitud l, la fuerza del resorte, de acuerdo con la ley de Hooke*, será proporcional a Δl y por lo tanto tendrá magnitud $k\Delta l$. La constante k depende del resorte y es llamada precisamente la constante del resorte. Para un peso conocido w puede calcularse midiendo Δl y usando

$$k\Delta l = mg. \tag{2}$$

Nótese que k tiene las dimensiones de $mg/\Delta l$, esto es, fuerza/long.

En el problema dinámico correspondiente, estamos interesados en estudiar el movimiento de la masa cuando ésta está actuada por una fuerza externa o está desplazada inicialmente. Supóngase que u, medida positiva hacia abajo, denote el desplazamiento de la masa de la posición de equilibrio. El desplazamiento u depende de t y está relacionado a las fuerzas que actúan

* Hooke (1635-1703) publicó esta ley por primera vez en 1676 como un anagrama: *ceiiinosssttuv*; y en 1678 dio la solución *ut tensio sic vis* que significa, burdamente, "así como es la fuerza es el desplazamiento".

sobre la masa a través de la ley de Newton, la cual establece que md^2u/dt^2 debe tener la misma magnitud y estar en la misma dirección que la fuerza neta resultante que actúa sobre la masa m. Al deducir la ecuación que gobierna el movimiento de la masa, se debe tener cuidado para determinar los signos correctos de las diferentes fuerzas que actúan sobre la masa. En nuestra deducción adoptamos la convención de que una fuerza que apunta hacia abajo es positiva, mientras que una fuerza que apunte hacia arriba es negativa. Hay cuatro fuerzas que actúan sobre la masa, ellas son:

1. Su peso, $w = mg$, que siempre actúa hacia abajo.

2. La fuerza debida al resorte F_s, que es proporcional al alargamiento, $\Delta l + u$ y siempre actúa para regresar al resorte a su posición natural. Si $\Delta l + u > 0$, el resorte se extiende y la fuerza, que está dirigida hacia arriba está dada por $F_s(t) = -k(\Delta l + u)$. Nótese que la magnitud de la fuerza que el resorte hace sobre la masa es $k(\Delta l + u)$; el signo menos nos dice que esta fuerza está dirigida hacia arriba en este caso particular. Si $u + \Delta l < 0$, esto es, $-u > \Delta l$, el resorte está comprimido una distancia* $(-u) - (\Delta l)$ y la fuerza, que está dirigida hacia abajo, es $k[(-u) - (\Delta l)]$; de aquí que para toda u

$$F_s(t) = -k(\Delta l + u). \tag{3}$$

Enfatizamos otra vez que la Ec. (3) da no solamente la magnitud, sino también la dirección de la fuerza ejercida sobre la masa por el resorte en cualquier posición u.

3. El amortiguamiento o fuerza de resistencia, $F_d(t)$. Esta fuerza puede deberse a las propiedades viscosas del fluido en el que se mueve la masa (resistencia del aire, por ejemplo); o la masa móvil puede conectarse a un mecanismo amortiguador (ver figura 3.2). En cada caso la fuerza amortiguante actuará en una dirección opuesta a la dirección de movimiento de la masa.

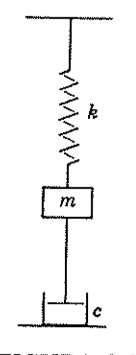


FIGURA 3.2

Sabemos de la evidencia experimental, que en tanto que la velocidad de la masa no sea demasiado grande, la resistencia puede tomarse como proporcional a la velocidad, $|du/dt|$. Si la masa se está moviendo hacia abajo, u está

* Recuerde que si la masa está por encima de la posición de equilibrio, su *distancia* sobre la posición de equilibrio es $-u$, no u.

aumentando y por lo tanto du/dt es positivo, entonces $F_d(t)$, que está dirigida hacia arriba, está dada por $-c(du/dt)$. La constante positiva c es llamada la constante de amortiguamiento; tiene las unidades de fuerza/velocidad. Si la masa se está moviendo hacia arriba, u disminuye, du/dt es negativo, y $F_d(t)$, que está ahora dirigida hacia abajo, está dada otra vez por $-c(du/dt)$. Por lo tanto, para toda u

$$F_d(t) = -c\frac{du}{dt}. \tag{4}$$

4. Una fuerza aplicada $F(t)$ que está dirigida hacia abajo o hacia arriba según que $F(t)$ sea positiva o negativa. Esta podría ser una fuerza debida al movimiento de la base a la que estuviese fijo el resorte, o podría ser una fuerza directamente aplicada a la masa.

De acuerdo con la ley de Newton

$$mg + F_s(t) + F_d(t) + F(t) = m\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Substituyendo en $F_s(t)$ y $F_d(t)$ se tiene

$$mg - k(\Delta l + u) - c\frac{du}{dt} + F(t) = m\frac{d^2u}{dt^2}. \tag{5}$$

Ya que $k\Delta l = mg$, la Ec. (5) se reduce a la ecuación diferencial (1),

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t).$$

Al escribir esta ecuación hemos seguido la convención común de indicar las derivadas respecto del tiempo por puntos.

Es importante recordar que en la Ec. (1), la masa m, la constante de amortiguamiento c y la constante del resorte k son constantes *positivas*. También es importante reconocer que la Ec. (1) representa solamente una ecuación aproximada para la determinación de u. En realidad la relación entre $F_s(t)$ y $\Delta l + u$ no es lineal; sin embargo, para muchos de los materiales usados, tales como el acero, y para $(\Delta l + u)/l \ll 1$, la relación es, con un alto grado de precisión, aproximadamente lineal. Similarmente, la expresión para la fuerza de amortiguamiento es también aproximada. Hemos despreciado asimismo la masa del resorte en comparación con la del cuerpo fijo a él en la deducción de la Ec. (1). Afortunadamente, para una amplia variedad de aplicaciones, la Ec. (1) es un modelo matemático satisfactorio del modelo físico.

La formulación completa del problema de las vibraciones requiere la especificación de dos condiciones iniciales: el desplazamiento inicial u_0 y la velocidad inicial $\dot{u}_0$. Puede no ser obvio, a partir del razonamiento físico, que podemos especificar solamente dos condiciones iniciales, o que éstas son las dos que deben especificarse. Sin embargo, se concluye del Teorema de existencia y unicidad 3.2 que estas condiciones conducen a un problema matemático que tiene una solución única. La solución de la Ec. (1) que satisface estas condiciones iniciales da la posición de la masa como función del tiempo.

Ejemplo. Deducir el problema de valores iniciales para el siguiente sistema de resorte-masa-amortiguador. Se sabe que un peso de 5 libras alarga el resorte 1 plg. El mecanismo amortiguador ejerce una fuerza de 0.02 libra para una velocidad de 2 plg/seg. Se fija al resorte un peso de 2 libras y se suelta el resorte desde una posición de 2 plg abajo de la posición de equilibrio.

Tenemos

$$m = \frac{w}{g} = \frac{2\text{ lb}}{32\text{ pie/seg}^2} = \frac{1}{16}\,\frac{\text{lb-seg}^2}{\text{pie}},$$

$$c = \frac{0.02\text{ lb}}{2\text{ plg/seg}} = \frac{0.02\text{ lb}}{(1/6)\text{ pie/seg}} = 0.12\,\frac{\text{lb-seg}}{\text{pie}},$$

$$k = \frac{5\text{ lb}}{1\text{plg}} = \frac{5\text{ lb}}{(1/12)\text{ pie}} = 60\,\frac{\text{lb}}{\text{pie}};$$

y de aquí que

$$\tfrac{1}{16}\ddot{u} + 0.12\dot{u} + 60u = 0,$$

ó

$$\ddot{u} + 1.92\dot{u} + 960u = 0,$$

donde u está medido en pies y t en segundos. Las condiciones iniciales son $u(0) = \frac{1}{6}$, $\dot{u}(0) = 0$.

3.7.1 VIBRACIONES LIBRES

Si no hay fuerza externa ni amortiguamiento, la Ec. (1) de la sección previa se reduce a

$$m\ddot{u} + ku = 0. \tag{1}$$

La solución de esta ecuación es

$$u = A\cos\omega_0 t + B\operatorname{sen}\omega_0 t, \tag{2}$$

donde

$$\omega_0^2 = k/m, \tag{3}$$

y ω_0, llamada la frecuencia circular, tiene claramente las unidades de 1/tiempo. Para un problema particular, las constantes A y B son determinadas por las condiciones iniciales prescritas.

Al discutir la solución de la Ec. (1) es conveniente escribir la Ec. (2) en la forma

$$u = R\cos(\omega_0 t - \delta). \tag{4}$$

Esto puede hacerse siempre, sin mirar cuáles son los valores de A y B, tomando $R = (A^2 + B^2)^{1/2}$ y resolviendo las ecuaciones $A = R\cos\delta$ y $B = R\operatorname{sen}\delta$ para δ.

Debido al carácter periódico de la función coseno, la Ec. (4) representa un movimiento periódico, o movimiento armónico simple, de período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Para distinguir entre problemas de vibraciones libres sin amortiguamiento y problemas de vibraciones amortiguadas o vibraciones forzadas, la frecuencia circular, ω_0, y el período, $2\pi/\omega_0$, del movimiento no amortiguado y no forzado se conocen generalmente como la frecuencia *natural* circular y el período *natural* de la vibración.

Ya que $|\cos(\omega_0 t - \delta)| \leq 1$, u siempre está entre las rectas $u = \pm R$. El desplazamiento máximo se encuentra a los tiempos $\omega_0 t - \delta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Las constantes R y δ son llamadas la amplitud y el ángulo de fase, respectivamente, del movimiento. Un dibujo del movimiento representado por la Ec. (4) está mostrado en la figura 3.3. Nótese que este movimiento periódico no muere cuando el tiempo aumenta. Esta es una consecuencia de despreciar la fuerza de amortiguamiento, la cual nos permitiría un medio de disipar la energía suministrada al sistema por el desplazamiento original y la velocidad inicial.

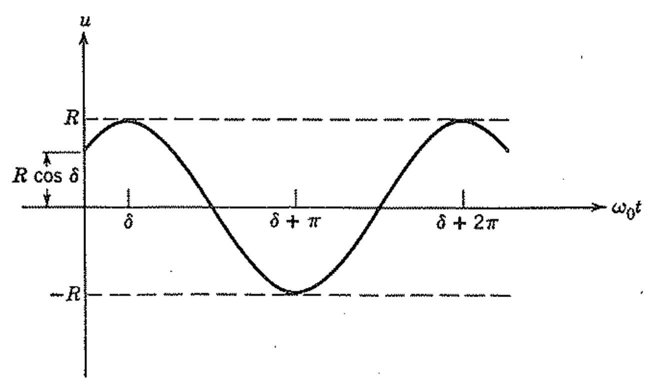


FIGURA 3.3 Movimiento armónico simple.

Ejemplo. Encuentre el período natural de un sistema masa-resorte si la masa pesa diez libras y alarga un alambre de acero 2 plg. Si el resorte se alarga dos plg más y entonces se suelta, determínese el movimiento subsecuente.

La constante del resorte es $k = 10$ lb/2 plg $= 60$ lb/pies. La masa $m = w/g = 10/32$ lb(pie/seg^2). De aquí que

$$T = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} = 2\pi\left[\frac{10}{(32)60}\right]^{1/2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \text{ seg.}$$

La ecuación de movimiento es

$$\tfrac{10}{32}\ddot{u} + 60u = 0;$$

por lo tanto

$$u = A\cos(8\sqrt{3}t) + B\,\text{sen}\,(8\sqrt{3}t).$$

La solución que satisface las condiciones iniciales $u(0) = 1/6$ pie y $\dot{u}(0) = 0$ es

$$u = \tfrac{1}{6}\cos(8\sqrt{3}t),$$

donde t está medido en segundos y u está medido en pies.

Vibraciones Amortiguadas Libres. Si incluimos el efecto de amortiguamiento, la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la masa es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0. \tag{6}$$

Las raíces de la ecuación auxiliar correspondiente son

$$r_1, r_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Ya que c, k y m son positivas, $c^2 - 4km$ es siempre menor que c^2; y de aquí que si $c^2 - 4km \geq 0$ los valores de r_1 y r_2 dados por la Ec. (7) son *negativos*. Si $c^2 - 4km < 0$ los valores de r_1 y r_2 dados por la Ec. (7) son complejos, pero con una parte real *negativa*. En forma de tabla, la solución de la Ec. (6) es

$$c^2 - 4km > 0, \qquad u = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \qquad r_1 \text{ y } r_2 < 0; \tag{8}$$

$$c^2 - 4km = 0, \qquad u = (A + Bt)e^{-(c/2m)t}; \tag{9}$$

$$c^2 - 4km < 0, \qquad u = e^{-(c/2m)t}(A\cos\mu t + B\,\text{sen}\,\mu t), \qquad \mu = \sqrt{4km - c^2}/2m > 0. \tag{10}$$

En todos los tres casos, sin tomar en cuenta las condiciones iniciales, esto es, sin tomar en cuenta los valores de A y B, $u \to 0$ cuando $t \to \infty$, y de aquí que el movimiento se acabe cuando el tiempo aumenta. De aquí que las soluciones de las Ecs. (1) y (6) confirmen lo que esperábamos intuitivamente, que sin amortiguamiento el movimiento continúa siempre igual y que con amortiguamiento decae a cero cuando el tiempo aumenta.

Los dos primeros casos, las Ecs. (8) y (9), que se conocen como *sobreamortiguada* y *críticamente amortiguada* respectivamente, representan movimientos en los cuales la masa originalmente desplazada "trepa" hasta su posición de equilibrio. Dependiendo de las condiciones iniciales, puede ser posible que la masa sobrepase la posición de equilibrio una vez, pero éste no es un "movimiento vibratorio". Dos ejemplos típicos de tal movimiento están dibujados en la figura 3.4. Además la teoría está discutida en los problemas 14 y 15.

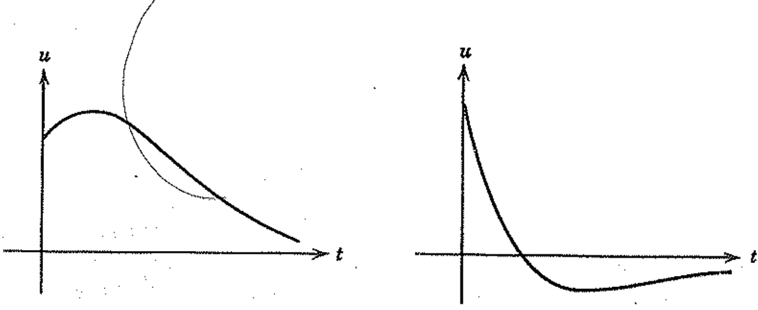


FIGURA 3.4 Movimientos sobreamortiguados.

El tercer caso, que se conoce como movimiento de *amortiguación periódica*, se encuentra a menudo en sistemas mecánicos y representa una "vibración amortiguada". Para ver esto, pongamos otra vez $A = R\cos\delta$ y $B = R \operatorname{sen}\delta$ en la Ec. (10), obtenemos

$$u = Re^{-(c/2m)t}\cos(\mu t - \delta). \tag{11}$$

El desplazamiento u deberá estar entre las curvas $u = \pm Re^{-(c/2m)t}$, y por lo tanto se parece a una curva cosenoidal con amplitud decreciente. Un ejemplo típico está dibujado en la figura 3.5.

Mientras que el movimiento no es verdaderamente periódico, podemos definir un cuasiperíodo $T_d = 2\pi/\mu$, como el tiempo entre los sucesivos máximos del desplazamiento.

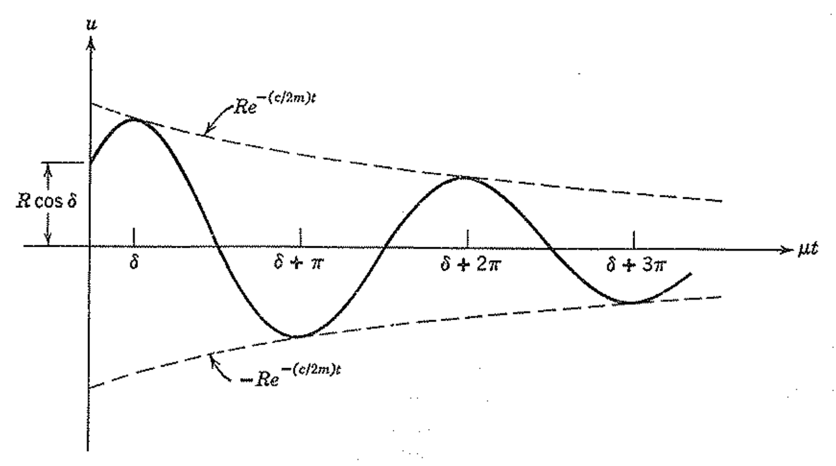


FIGURA 3.5 Vibración amortiguada.

Es interesante notar la relación entre T_d y T. Tenemos

$$T_d = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi\left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}\right)^{-1/2} = 2\pi\left(\frac{k}{m}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{c^2}{4km}\right)^{-1/2}$$

$$= T\left(1 - \frac{c^2}{4km}\right)^{-1/2}.$$

De aquí que si $c^2/4km$ es pequeña,

$$T_d \cong T\left(1 + \frac{c^2}{8km}\right).$$

Consecuentemente, cuando el amortiguamiento es muy pequeño, esto es, cuando la cantidad sin dimensiones $c^2/4km \ll 1$, podemos despreciar el amortiguamiento al calcular el cuasiperíodo de vibración. En muchos problemas físicos es ésta precisamente la situación. Por otra parte, si queremos estudiar el movimiento detallado de la masa para todo tiempo, no podemos *nunca* despreciar la fuerza de amortiguamiento, no importa cuán pequeña sea ésta. La importancia de la fuerza de amortiguamiento se hará más evidente en la sección siguiente en la que discutiremos las vibraciones forzadas.

PROBLEMAS

1. Un peso de 2 lbs alarga 6 plg un resorte de 2 pies. Si el peso es jalado hacia abajo 3 plg más y es soltado entonces, determínese el movimiento subsecuente despreciando la resistencia del aire. ¿Cuáles son la amplitud, la frecuencia circular, y el período del movimiento?

2. Una masa de 100 gr está fija a un resorte de acero de longitud natural igual a 50 cm. El resorte se alarga 5 cm cuando se le agrega la masa. Si la masa es puesta en movimiento con una velocidad de 10 cm/seg hacia abajo, determínese el movimiento subsecuente. Despréciese la resistencia del aire.

3. Un peso de 3 lbs alarga un resorte espiral tres plg. Si el peso es empujado hacia arriba, contrayendo al resorte una distancia de una plg, y se suelta entonces con una velocidad hacia abajo de 2 pies/seg, determínese el movimiento subsecuente. Despréciese la resistencia del aire. ¿Cuál es la amplitud, la frecuencia circular, y el período del movimiento?

4. Mostrar que el período del movimiento de una vibración no amortiguada de una masa colgando de un resorte vertical es $2\pi\sqrt{\Delta l/g}$ donde Δl es el alargamiento debido al peso w.

5. En el problema 3 supóngase que la resistencia del aire ejerce una fuerza de amortiguamiento que está dada por $0.3\dot{u}$ lb. Compárese el "cuasiperíodo" del movimiento amortiguado con el período natural del movimiento no amortiguado. ¿Cuál es el cambio porcentual basado en el período natural?

6. En el problema 5, ¿qué tan grande debe ser el coeficiente de amortiguamiento como para que cause un cambio de 50% en el período de movimiento?

7. Mostrar que $A\cos\omega_0 t + B\operatorname{sen}\omega_0 t$ puede escribirse en la forma $r\operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$. Determínese r y θ en términos de A y B. ¿Cuál es la relación entre r, R, y θ y δ si $R\cos(\omega_0 t - \delta) = r\operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$?

8. Determínese la solución de la ecuación diferencial $m\ddot{u} + ku = 0$ que satisface las siguientes condiciones iniciales. Exprese su respuesta en la forma $R\cos(\omega_0 t - \delta)$.

a) $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$ *b*) $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$ *c*) $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

9. Determine el período natural de oscilación del péndulo de longitud l mostrado en la figura 3.6. Despréciense la resistencia del aire y el peso del resorte comparado con el peso de la masa. Suponer que θ es suficientemente pequeño como para que $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$.

10. Una masa de 20 gr estira un resorte espiral una distancia de 5 cm. Si el resorte está conectado a un amortiguador de aceite que tiene una constante de amortiguamiento de 400 dinas/seg/cm, determínese el movimiento subsecuente si la masa es jalada hacia abajo una distancia adicional de 2 cm y soltada luego.

11. Un peso de 16 lbs estira un resorte 3 plg. El peso está conectado a un mecanismo amortiguador que tiene una constante de amortiguamiento de 2 lbs

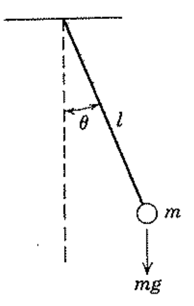


FIGURA 3.6

seg/pie. Determínese el movimiento subsecuente si el peso se suelta de su posición de equilibrio con una velocidad de 3 plg/seg en la dirección hacia abajo.

12. Un peso de 8 lbs está fijo a un resorte de acero de 15 cm de longitud. El peso extiende al resorte una distancia de $\frac{1}{8}$ de pie. Si el peso está conectado también a un amortiguador de aceite que tiene una constante de amortiguamiento c, determine los valores de c para los que el movimiento será sobreamortiguado, críticamente amortiguado y de movimiento armónico amortiguado. Esté seguro de dar las unidades correctas para c.

13. Mostrar que si la constante de amortiguamiento c, en la ecuación $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$ es tal, que el movimiento es sobreamortiguado o críticamente amortiguado, entonces la masa puede pasar a través de su posición de desplazamiento cero a lo mucho una vez, sin importar cuáles sean las condiciones iniciales.
Sugerencia: Determine todos los valores posibles de t tales que $u = 0$.

14. Para el caso de amortiguamiento crítico, encuéntrese la solución general de la Ec. (6) que satisface las condiciones iniciales $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$. Si $\dot{u}_0 = 0$, mostrar que $u \to 0$ cuando $t \to \infty$, pero $u \neq 0$ para cualquier valor finito de t. Suponiendo que u_0 es positiva, determine una condición sobre $\dot{u}_0$ que asegure que la masa pasará a través del punto de desplazamiento cero después de que haya sido soltada.

*15. Para la oscilación amortiguada dada por la Ec. (11) el tiempo entre máximos sucesivos es $T_d = 2\pi/\mu$. La razón del desplazamiento en dos máximos sucesivos (al tiempo t y al tiempo $t + T_d$) está dado por $e^{(c/2m)T_d}$. De aquí que los desplazamientos sucesivos en intervalos de tiempo T_d formen una progresión geométrica con razón $e^{(c/2m)T_d}$. El logaritmo natural de esta razón, denotado por $\Delta = (c/2m)T_d = (\pi c/m\mu)$, se conoce como el *decremento logarítmico*. Ya que m, μ, y Δ son cantidades que fácilmente pueden medirse para un sistema mecánico, esta ecuación da un método conveniente y *práctico* de calcular la constante de amortiguamiento del sistema. En particular para el movimiento de una masa vibratoria en un fluido viscoso, la constante de amortiguamiento depende de la viscosidad del fluido; para formas geométricas simples se conoce la forma de esta dependencia, y las relaciones anteriores permiten la determinación de la viscosidad experimentalmente. Esta es una de las formas más precisas de determinar la viscosidad de un gas a alta presión.

a) En el problema 11, ¿cuál es el decremento logarítmico?

b) En el problema 12, si el decremento logarítmico medio es 3, y $T_d = 0.3$ seg, determínese la constante de amortiguamiento c.

3.7.2 VIBRACIONES FORZADAS

Considérese ahora el caso en el que una fuerza externa periódica, digamos $F_0 \cos \omega t$, se aplique a un sistema masa-resorte. En este caso la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \cos \omega t. \tag{1}$$

Supondremos primero que no hay amortiguamiento; entonces la Ec. (1) se reduce a

$$m\ddot{u} + ku = F_0 \cos \omega t. \tag{2}$$

Siempre y cuando $\omega_0 = \sqrt{k/m} \neq \omega$, la solución general de la Ec. (2) es

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \tag{3}$$

Las constantes c_1 y c_2 están determinadas por las condiciones iniciales. El movimiento resultante es, en general, la suma de dos movimientos periódicos de diferentes frecuencias (ω_0 y ω) y amplitudes. Consideraremos dos ejemplos.

Batimientos. Supóngase que la masa está inicialmente en reposo, esto es, $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$. Esto nos hace ver que las constantes c_1 y c_2 en la Ec. (3) están dadas por

$$c_1 = \frac{-F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \qquad c_2 = 0, \tag{4}$$

y la solución de la Ec. (2) es

$$u = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{5}$$

Esta es la suma de dos funciones periódicas pero de la misma amplitud. Haciendo uso de las identidades trigonométricas $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ con $A = (\omega_0 + \omega)t/2$ y $B = (\omega_0 - \omega)t/2$, podemos escribir la Ec. (5) en la forma

$$u = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}. \tag{6}$$

Si $|\omega_0 - \omega|$ es pequeña, $\omega_0 + \omega >> |\omega_0 - \omega|$, y consecuentemente $\operatorname{sen}(\omega_0 + \omega)t/2$ será una función rápidamente oscilante comparada con $\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega)t/2$. Entonces el movimiento es una oscilación rápida con frecuencia circular $(\omega_0 + \omega)/2$, pero con una lenta variación sinusoidal de la amplitud. Este tipo de movimiento, que posee una variación periódica de la amplitud, exhibe lo que es llamado un *batimiento*. Tal fenómeno ocurre en acústica cuando dos diapasones de una frecuencia casi semejante son sonados simultáneamente. En este caso la variación periódica de la amplitud puede

advertirse naturalmente sin ningún aparato, a simple oído. En electrónica, la variación de la amplitud con el tiempo es llamada la *modulación de amplitud.* La función $u = \phi(t)$ dada en la Ec. (6) está dibujada en la figura 3.7.

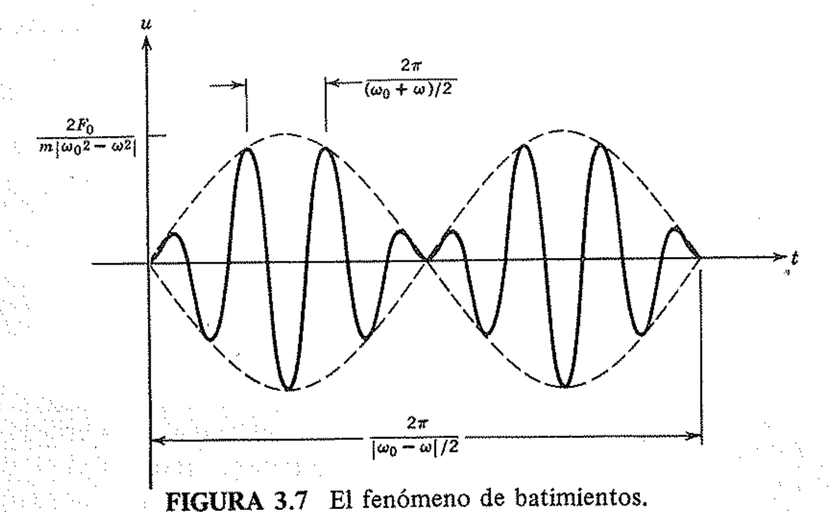


FIGURA 3.7 El fenómeno de batimientos.

Resonancia. Como un segundo ejemplo, considérese el caso $\omega = \omega_0$; esto es, el período de la función reforzante es el mismo que el período natural del sistema. Entonces el término nohomogéneo $F_0 \cos \omega t$ es una solución de la ecuación homogénea. En este caso, la solución de la Ec. (2) es

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{7}$$

Debido a la presencia del término $t \operatorname{sen} \omega_0 t$ en la Ec. (7) es claro, sin importar los valores de c_1 y c_2 que el movimiento se hará no acotado cuando $t \to \infty$; ver figura 3.8. Este es el fenómeno conocido como *resonancia.* En la

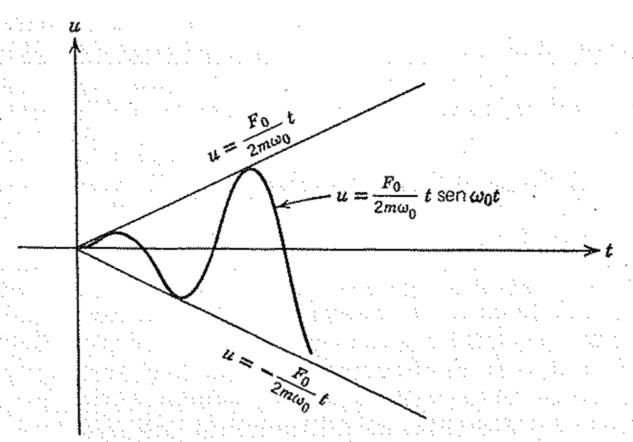


FIGURA 3.8 El fenómeno de resonancia.

práctica real, sin embargo, lo que sucede es que el resorte se rompe en un momento determinado. Por supuesto, tan pronto como u se hace grande, nuestra teoría ya no es válida porque hemos supuesto que u es pequeña cuando usamos una relación lineal para determinar la constante del resorte. Si se incluye amortiguamiento en el sistema, de todos modos el movimiento permanecerá acotado; sin embargo, puede haber aún una gran respuesta a la función de entrada $F_0 \cos \omega t$ si el amortiguamiento es pequeño y ω está cercano a ω_0.

Vibraciones Forzadas Amortiguadas. El movimiento del sistema masa-resorte con amortiguamiento y la función reforzante $F_0 \cos \omega t$ pueden determinarse de una manera directa. Aunque los cálculos son más bien largos, no son difíciles. La solución de la Ec. (1) es

$$u = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta), \tag{8}$$

donde δ está dado por $\cos \delta = m(\omega_0^2 - \omega^2)/\Delta$ y $\operatorname{sen} \delta = c\omega/\Delta$ con $\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}$. Aquí r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación auxiliar asociada con la Ec. (1). Como se mostró en la última sección, tanto $e^{r_1 t}$ como $e^{r_2 t}$ tienden a cero cuando $t \to \infty$. De aquí que cuando $t \to \infty$,

$$u \to u_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta). \tag{9}$$

Por esta razón $u_c(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ se llama a menudo la *solución transitoria* y $u_p(t)$ se llama la solución de estado estacionario. Hablando burdamente, la solución transitoria nos permite satisfacer las condiciones iniciales impuestas; cuando el tiempo aumenta, la energía puesta en el sistema por el desplazamiento inicial y la velocidad se disipa a través de la fuerza de amortiguamiento, y el movimiento representa entonces la respuesta del sistema a la fuerza externa $F(t)$. Sin amortiguamiento (lo cual por supuesto es imposible en cualquier sistema físico), el efecto de las condiciones iniciales persiste todo el tiempo.

Nótese que $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2$ nunca es cero, aun para $\omega = \omega_0$; de aquí que con amortiguamiento el movimiento siempre está acotado. Para valores fijos de m, c y k la amplitud de la solución para el estado estacionario será un máximo cuando $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2$ es un mínimo; esto corresponde a la elección

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}\right)^2. \tag{10}$$

Al diseñar un sistema masa-resorte* para detectar fuerzas periódicas en un rango estrecho de frecuencias alrededor de ω, es claro que debemos querer

* Tales instrumentos se refieren usualmente a instrumentos sísmicos, ya que son similares en principio al sismógrafo que es usado para detectar movimientos de la superficie de la Tierra. El movimiento periódico de la masa a la que está unido el resorte es equivalente a un problema en el cual una fuerza periódica actúa sobre la masa.

elegir k, c y m en forma tal que la Ec. (10) se satisfaga o casi se satisfaga. En esta forma obtenemos la máxima respuesta del sistema para fuerzas tales, haciendo más fácil su detección. Una situación similar ocurre en problemas que involucran la detección de señales eléctricas en redes eléctricas.

PROBLEMAS

1. Expresar $\cos 9t - \cos 7t$ en la forma $A \operatorname{sen} \alpha t \operatorname{sen} \beta t$.

2. Expresar $\operatorname{sen} 7t - \operatorname{sen} 6t$ en la forma $A \operatorname{sen} \alpha t \cos \beta t$.

3. Un resorte en espiral se estira $\frac{1}{8}$ de pie por un peso de 4 lbs. El resorte está actuado por una fuerza externa $2 \cos 3t$ lbs. Si el peso se desplaza una distancia de 2 plg de su posición de equilibrio y se suelta entonces, determínese el movimiento subsecuente. Despréciese el amortiguamiento. Si la fuerza externa es $4 \operatorname{sen} \omega t$ lb, ¿para cuál valor de ω se encontrará resonancia?

4. Si un sistema masa-resorte no amortiguado con un peso de 6 lbs y una constante de resorte de 1 lb/plg se pone repentinamente en movimiento en $t = 0$ por una fuerza externa de $4 \cos 7t$ lb, determínese el movimiento subsecuente y trácese una gráfica de desplazamiento contra t.

5. Determine la solución de la ecuación diferencial $m\ddot{u} + ku = F_0 \cos \omega t$, $\omega \neq \sqrt{k/m}$ que satisface las siguientes condiciones iniciales:

a) $u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = 0$ *b*) $u(0) = 0,\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0$ *c*) $u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0$

6. Una generalización del fenómeno de batimientos ocurre cuando el movimiento es la suma de dos funciones periódicas de diferentes amplitudes $A \cos \omega t$ y $B \cos \omega_0 t$. Mostrar que tal clase de movimiento puede expresarse como

$$R(t) \cos \left[\frac{\omega_0 + \omega}{2} t - \delta(t)\right].$$

Si $|A - B| \ll 1$ y $|\omega - \omega_0| \ll 1$, mostrar que R es una función lentamente variante. La variación del ángulo de fase δ con t se llama a menudo la *variación de frecuencia.*

*7. Determine el movimiento $u = \phi(t)$ de una masa m que está colgando de un resorte con una constante de elasticidad k si la masa es actuada por una fuerza

$$F(t) = F_0 \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq \pi \\ 2\pi - t, & \pi < t \leq 2\pi \\ 0, & 2\pi < t \end{cases}$$

donde t está medido en segundos. Por conveniencia supóngase que $\omega_0{}^2 = k/m = 1$. Despréciese la resistencia del aire.
Sugerencia: Trate cada intervalo de tiempo separadamente, e iguale las soluciones en los diferentes intervalos requiriendo que ϕ y $\dot{\phi}$ sean funciones continuas de t.

8. Un resorte espiral está estirado 6 plg por un peso de 8 lbs. La masa está conectada a un mecanismo amortiguador que tiene una constante de amortiguamiento de 0.25 lbs seg/pie. Si la masa está sujeta a una fuerza externa de la forma $4 \cos 2t$ lbs, determine la respuesta del estado estacionario del sistema. ¿Cuál es la elección óptima de la masa m para maximizar la respuesta del sistema a esta fuerza externa?

Redes Eléctricas. Los problemas del 9 al 17 tratan con el análogo en una red eléctrica, mostrada en la figura 3.9, de un sistema masa-resorte. La ecuación que gobierna el flujo de corriente en el circuito está dada por la segunda ley de Kirchoff (1824-1887): *En un circuito cerrado el voltaje marcado es igual a la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito.* En términos de la carga Q (coulombs) sobre el condensador, esta ecuación es

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = E(t), \tag{i}$$

Resistencia R
Capacitancia C
I
Inductancia L
Voltaje marcado $E(t)$

FIGURA 3.9

donde L es la inductancia (henrys), R es la resistencia (ohms), C es la capacidad (farads), y E es el voltaje marcado. La carga Q está relacionada a la corriente I (amperes) por $I = dQ/dt$. Las condiciones iniciales son de la forma $Q(0) = Q_0$, $\dot{Q}(0) = I(0) = I_0$.

Nótese que Q, $\dot{Q}$, L, R, $1/C$ y $E(t)$ son los análogos del desplazamiento u, velocidad $\dot{u}$, masa m, amortiguamiento c, constante del resorte k, y fuerza externa $F(t)$ respectivamente, de un sistema de masa-resorte. Como una consecuencia, es posible resolver problemas en vibraciones mecánicas, construyendo el circuito eléctrico correspondiente y midiendo entonces la carga Q. Esta es una de las ideas básicas en el grande e importante campo de las computadoras analógicas.*

9. Si no hay resistencia presente en un simple circuito en serie, mostrar que en ausencia de un voltaje marcado, la carga Q sobre el condensador es periódica en el tiempo con frecuencia $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. La cantidad $\sqrt{1/LC}$ se conoce como la frecuencia natural del circuito.

10. Mostrar que si no hay resistencia en el circuito y el voltaje marcado es de la forma $E_0 \cos \omega t$, entonces la carga sobre el condensador se hace no acotada cuando $t \to \infty$ si $\omega = \sqrt{1/LC}$. Este es el fenómeno de resonancia. Mostrar que la carga siempre es finita, no importa cómo se escoja ω, siempre y cuando haya alguna resistencia, no importa cuán pequeña sea, en el circuito.

* Para una introducción simple a la teoría de las computadoras analógicas, véase T. D. Truitt y A. E. Rogers.

11. Mostrar que la solución de $L\ddot{I} + R\dot{I} + (1/C)I = 0$ es de la forma

$$\begin{aligned} I &= Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, && \text{para } R^2 - 4L/C > 0; \\ &= (A + Bt)e^{r_1 t}, && \text{para } R^2 - 4L/C = 0; \\ &= e^{\lambda t}(A \cos \mu t + B \operatorname{sen} \mu t) && \text{para } R^2 - 4L/C < 0. \end{aligned}$$

El circuito se dice que está sobreamortiguado, críticamente amortiguado o con amortiguamiento periódico correspondiendo a estos tres casos respectivamente.

12. Supóngase que un circuito en series consiste de un inductor, una resistencia y un condensador que está abierto, y hay una carga inicial $Q_0 = 10^{-6}$ sobre el condensador. Determine la variación de la carga y la corriente después de que se cierra el interruptor para los casos siguientes

a) $L = 0.2$, $C = 10^{-5}$, $R = 3 \times 10^2$
b) $L = 1$, $C = 4 \times 10^{-6}$, $R = 10^3$
c) $L = 2$, $C = 10^{-5}$, $R = 4 \times 10^2$

13. Si $L = 0.2$ henry y $C = 0.8 \times 10^{-6}$ farads, determine la resistencia R tal que el circuito esté críticamente amortiguado.

14. Mostrar que si $E(t) = E_0 \cos \omega t$ y $R \neq 0$, entonces

$$Q \to Q_p(t) = \frac{E_0(1/C - L\omega^2) \cos \omega t + \omega R E_0 \operatorname{sen} \omega t}{(1/C - L\omega^2)^2 + \omega^2 R^2}.$$

La función Q_p se conoce a menudo como la solución para el estado estacionario de la Ec. (i).

15. Un circuito en serie tiene un condensador de 0.25×10^{-6} farads, una resistencia de 5×10^3 ohms, y una inductancia de 1 henry. La carga inicial sobre el condensador es cero. Si se conecta una batería de 12 volts al circuito y se cierra éste al tiempo $t = 0$, determine la carga sobre el condensador a $t = 0.001$ seg y la carga en el estado estacionario.

16. Determine la corriente en el estado estacionario de un circuito en serie cuyo voltaje marcado, es $E(t) = 110 \cos 120\pi t$ volts y $L = 10$ henrys, $R = 3 \times 10^3$ ohms, y $C = 0.25 \times 10^{-5}$ farads.

17. En un circuito en serie con valores dados de L, R y C y un voltaje marcado $E_0 \cos \omega t$, ¿para qué valor de ω será máxima la corriente en el estado estacionario?

REFERENCIAS

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green, Londres, 1927.

Truitt, T. D. y Rogers, A. E., *Basic of Analog Computers*, Rider, Nueva York, 1960.

Capítulo 4

Soluciones en serie de ecuaciones lineales de segundo orden

4.1 INTRODUCCION, REPASO DE SERIES DE POTENCIAS

En el capítulo 3 describimos métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Consideraremos ahora métodos para resolver ecuaciones de segundo orden cuando los coeficientes son funciones de la variable independiente. Es suficiente considerar la ecuación homogénea

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \tag{1}$$

ya que el procedimiento para la ecuación nohomogénea correspondiente es similar.

Una gran clase de problemas en física matemática conducen a ecuaciones de la forma (1) que tienen coeficientes polinomiales; por ejémplo la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

donde ν es una constante, y la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

donde α es una constante. Por esta razón, así como para simplificar los cálculos algebraicos, consideraremos principalmente el caso en el que las funciones P, Q y R son polinomios. Supóngase también que estamos interesados en resolver la Ec. (1) en la vecindad de un punto x_0, que es a menudo, pero no siempre, un punto donde están especificadas las condiciones iniciales. Si las funciones P, Q y R tienen $x - x_0$ como un factor común, supondremos que este factor común ha sido cancelado de la Ec. (1). De aquí que si $P(x_0) = 0$, entonces al menos uno de $Q(x_0)$ y $R(x_0)$ no son iguales a cero. La solución de la Ec. (1) en un intervalo que contiene a x_0 está muy asociada con el comportamiento de P en ese intervalo. En particular, si P no se anula

en el intervalo, la existencia de una solución está garantizada por el Teorema 3.2. En las secciones 4.2 y 4.2.1, consideraremos la solución de la Ec. (1) en la vecindad de un punto x_0 donde $P(x_0) \neq 0$. Tal punto es llamado un *punto ordinario* de la Ec. (1). Por otra parte, si $P(x_0) = 0$, no se aplica el Teorema 3.2. Tal punto es llamado un *punto singular* de la Ec. (1). Las secciones 4.3 hasta 4.6 tratan con la determinación de soluciones de la Ec. (1) en la vecindad de un punto singular.

En cada caso el método de solución está basado sobre la idea de expresar y como una serie infinita en potencias de $x - x_0$, donde x_0 es algún punto especificado. Mientras que a primera vista puede parecer decepcionante pensar en encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales en forma de series infinitas, desde un punto de vista computacional, ésta puede ser la forma más conveniente de resolver la ecuación diferencial. En verdad, las tablas de sen x y cos x (las soluciones de $y'' + y = 0$) han sido calculadas de su serie de Taylor alrededor de $x = 0$:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad (3)$$

$$(0! = 1)$$

o series similares. Al llevar a cabo un cálculo con una computadora electrónica de alta velocidad, que requiere los valores de sen x en un gran número de puntos, es mucho más práctico y rápido usar una representación en serie para sen x, tal como la dada por la Ec. (2), computando realmente los valores de sen x como parte del problema, que mirando los valores de sen x en una tabla y leyendo esta información en la computadora.

Ya que estaremos usando series infinitas una gran parte de este capítulo, es importante sumarizar sin prueba algunos de los resultados pertinentes concernientes a las series infinitas, y en particular a las series de potencias.

1. Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ se dice que converge en un punto x si

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n(x - x_0)^n$$

existe. Es claro que la serie converge para $x = x_0$; puede convergir para toda x, o puede convergir para algunos valores de x y no para otros.

2. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ se dice que converge absolutamente en un punto x si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$$

converge. Puede mostrarse que si la serie converge absolutamente, entonces la serie también converge; sin embargo, el inverso no es necesariamente cierto.

3. Una de las pruebas más útiles para la convergencia absoluta de una serie de potencias es la prueba de la razón. Si para un valor fijo de x

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right| = l,$$

la serie de potencias converge absolutamente en el valor de x si $l < 1$, y diverge si $l > 1$. Si $l = 1$ la prueba no es concluyente.

4. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge en $x = x_1$, converge absolutamente para $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$; y si diverge en $x = x_1$, diverge para $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

5. Hay un número ρ, llamado el radio de convergencia, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$ y diverge para $|x - x_0| > \rho$. Para una serie que no converge en ninguna parte excepto en x_0, definimos ρ de tal forma que sea cero; para una serie que converge para toda x, decimos que ρ es infinita. El intervalo de convergencia está señalado por la línea gruesa en la figura 4.1.

$x_0 - \rho$ x_0 $x_0 + \rho$ x

FIGURA 4.1

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ convergen a $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, para $|x - x_0| < \rho$, $\rho > 0$, entonces lo siguiente es verdadero para $|x - x_0| < \rho$.

6. Las series pueden sumarse o restarse término a término, y

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n.$$

7. Las series pueden multiplicarse formalmente, y

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$$

donde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. Además, si $g(x_0) \neq 0$, las series pueden dividirse formalmente y

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n,$$

aunque la fórmula para d_n es complicada. También en el caso de la división el radio de convergencia de la serie de potencias resultante puede ser menor que ρ.

8. La función f es continua y tiene derivadas de todos los órdenes para $|x - x_0| < \rho$. Además, $f', f'', \ldots$ pueden calcularse derivando la serie término a término; esto es

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1},$$

etc., y cada una de las series converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$.

9. El valor de a_n está dado por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

La serie es llamada una serie de Taylor para la función f alrededor de $x = x_0$.

10. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ para cada x, entonces $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. En particular, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ para cada x, entonces $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = \cdots = 0$.

Una función f que tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = x_0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

con un radio de convergencia $\rho > 0$ se dice que es *analítica* en $x = x_0$. De acuerdo con las afirmaciones anteriores, si f y g son analíticas en x_0 entonces $f \pm g$, $f \cdot g$, y f/g (siempre y cuando $g(x_0) \neq 0$) son analíticas en $x = x_0$. El resultado que será usado más a menudo en las secciones siguientes es que un polinomio es analítico en cada punto; y de aquí sus sumas, diferencias, productos y cocientes (excepto en ceros del denominador) de polinomios son analíticos en cada punto.

PROBLEMAS

1. Determine el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (x - 3)^n$ *b*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ *d*) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x + 1)^n}{n^2}$ *f*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n}$

2. Determine la serie de Taylor alrededor del punto x_0 para cada una de las siguientes funciones. Determine también el radio de convergencia de las series

a) $\operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$ *b*) e^x, $x_0 = 0$

c) x, $x_0 = 1$ *d*) x^2, $x_0 = -1$

e) $\ln x$, $x_0 = 1$ *f*) $\frac{1}{1 + x}$, $x_0 = 0$

g) $\frac{1}{1 - x}$, $x_0 = 0$ *h*) $\frac{1}{1 - x}$, $x_0 = 2$

3. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, calcule y' y y'' y escriba los primeros cuatro términos de cada serie así como el coeficiente de x^n en el término general.

4. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcule y' y y'' y escriba los primeros cuatro términos de cada serie así como el coeficiente de x^n en el término general. Muestre que si $y'' = y$ los coeficientes a_0 y a_1 son arbitrarios, y determine a_2 y a_3 en términos de a_0 y a_1. Muestre también que $a_{n+2} = a_n/(n + 2)(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

5. Es a menudo conveniente transformar una serie infinita haciendo un cambio del índice de suma. El índice de suma es un parámetro mudo justamente como la variable de integración es una variable muda para una integral definida. Verifíquense las siguientes series

a) $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} x^{k+2}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)a_{n+2} x^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$

d) $\sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m} x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+k} x^{n+p+k}$

donde k y m son enteros dados y p es una constante, $x > 0$.

4.2 SOLUCIONES EN SERIE EN LA VECINDAD DE UN PUNTO ORDINARIO, PARTE I

En esta sección ilustraremos el método para resolver

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

donde las funciones P, Q y R son polinomios, considerando varios ejemplos específicos. Estamos interesados en resolver la Ec. (1) en la vecindad de un punto x_0 en el cual $P(x_0) \neq 0$; esto es, x_0 es un punto ordinario. Ya que $P(x_0) \neq 0$ y P es continuo, se concluye que hay algún intervalo alrededor del punto x_0 donde P nunca es cero;* en este intervalo Q/P y R/P son funciones

* Geométricamente esto es plausible, y puede probarse rigurosamente.

continuas. De aquí que, de acuerdo al Teorema de existencia y unicidad 3.12, existe una solución única de la Ec. (1) que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ para una elección arbitraria de y_0 y y'_0.

Nos interesamos en soluciones de la Ec. (1) de la forma

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \quad (2)$$

Debemos considerar dos cuestiones. La primera es si podemos determinar* formalmente la a_n tal que y, dada por la Ec. (2) satisface la Ec. (1). La segunda es ver si la serie así determinada converge, y si lo hace, para qué valores de $x - x_0$. Si podemos mostrar que la serie converge para $|x - x_0| < \rho$, $\rho > 0$, entonces todos los procedimientos formales tales como la diferenciación término a término pueden justificarse, y habremos construido una solución de la Ec. (1) que es válida para $|x - x_0| < \rho$.

Pospondremos hasta la sección 4.2.1 todas las consideraciones sobre asuntos más teóricos tales como el radio de convergencia de la serie (2). Por el momento supondremos simplemente que tal solución existe, y mostraremos cómo determinar la a_n. La manera más práctica de hacer esto es simplemente substituir la serie (2) y sus derivadas para y, y' y y'' en la Ec. (1); se determinan entonces las a_n de tal forma que la ecuación diferencial se satisfaga formalmente. Los ejemplos siguientes ilustrarán el procedimiento. Las ecuaciones diferenciales involucradas son también por sí mismas de considerable importancia.

Ejemplo 1. Encontrar una solución en serie de potencias de x de la ecuación de Airy†

$$y'' = xy, \qquad -\infty < x < \infty. \quad (3)$$

Para esta ecuación $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$, y $R(x) = -x$; de aquí que, $x = 0$ es un punto ordinario y suponemos que

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \quad (4)$$

Derivando la Ec. (4) término a término obtenemos

$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + (n + 1)a_{n+1}x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)a_{n+1}x^n, \quad (5)$$
$$y'' = 2a_2 + \cdots + (n + 1)na_{n+1}x^{n-1} + (n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n. \quad (6)$$

* Por "formalmente determinado" entendemos "llevar a cabo todos los cálculos algebraicos necesarios para la determinación de una solución sin justificar en cada paso que es permisible hacer el cálculo".

† Sir George Airy (1801-1892) un famoso astrónomo y matemático inglés, fue nombrado profesor Lucasiano de Matemáticas en Cambridge a la edad de 25, y fue director del observatorio de Greenwich de 1835 a 1881. Una razón por la que la ecuación de Airy es de interés, es porque para x negativa las soluciones son oscilatorias, similares a funciones trigonométricas, y para x positiva una solución crece exponencialmente y la otra decrece exponencialmente. ¿Puede usted explicar por qué es razonable este comportamiento?

Substituyendo las series (4) y (6) para y y y'' en la Ec. (3) nos da

$$[2a_2 + (3 \cdot 2)a_3x + \cdots + (n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n + \cdots]$$
$$= x(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \cdots),$$

ó

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n + 2)(n + 1)a_{n+2}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n.$$

Para que se satisfaga esta ecuación es necesario que los coeficientes de potencias iguales de x sean iguales; por lo tanto tenemos

$$2a_2 = 0,$$
$$(3 \cdot 2)a_3 = a_0,$$
$$(4 \cdot 3)a_4 = a_1,$$
$$(5 \cdot 4)a_5 = a_2,$$

y en general

$$(n + 2)(n + 1)a_{n+2} = a_{n-1} \qquad \text{para} \qquad n \geq 1. \quad (7)$$

Nótese que no hay condiciones sobre a_0 y a_1; por lo tanto son arbitrarias. Esto no es sorprendente, nótese de la Ec. (2) que y y y' calculadas en x_0 son a_0 y a_1 respectivamente, y ya que las condiciones iniciales $y(x_0)$ y $y'(x_0)$ pueden elegirse arbitrariamente, se concluye que a_0 y a_1 deberán ser arbitrarias hasta que se establezcan condiciones iniciales específicas.

La Ec. (7) se conoce como una *relación de recurrencia.* De acuerdo a esta relación a_0 determina a_3, que a su vez determina a_6, etc. Por ejemplo,

$$a_9 = \frac{a_6}{9 \cdot 8} = \frac{a_3}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{a_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2},$$

ó

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(3n)(3n - 1)(3n - 3)(3n - 4) \cdots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Similarmente, a_1 determina a_4, a_7, a_{10}, etc; y a_2 determina a_5, a_8, a_{11}, etc. Ya que $a_2 = 0$, concluimos que $a_5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 0$. La solución de la ecuación de Airy es

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)(3n - 1) \cdots 3 \cdot 2} + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots\right.$$
$$\left.+ \frac{x^{3n+1}}{(3n + 1)(3n)(3n - 2)(3n - 3) \cdots 4 \cdot 3} + \cdots\right]$$

$$= a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 3\cdot 2}\right]$$
$$+ a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\cdots 4\cdot 3}\right]. \quad (8)$$

Debido al rápido crecimiento de los denominadores de los términos en la serie (8), podríamos esperar que esta serie tuviera un gran radio de convergencia. Realmente, como veremos en la sección siguiente, ambas series convergen para toda x. Ver también el problema 4.

Supóngase por el momento que la serie converge para toda x, y denótense por y_1 y y_2 las funciones que están definidas por el primero y segundo conjunto de paréntesis, respectivamente, en la Ec. (8). Entonces, eligiendo primero $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ y después $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, es claro que y_1 y y_2 son soluciones individuales de la Ec. (3). Nótese que y_1 satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$, $y'_1(0) = 1$, y y_2 satisface las condiciones iniciales $y_2(0) = 0$, $y'_2(0) = 1$. Por lo tanto $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$; y consecuentemente y_1 y y_2 son linealmente independientes. Por lo tanto la solución general de la ecuación de Airy es

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Ejemplo 2. Encontrar una solución de la ecuación de Airy en potencias de $x - 1$.

El punto $x = 1$ es un punto ordinario de la Ec. (3), y por lo tanto buscamos una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

Entonces

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n,$$

y

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n.$$

Substituyendo y y y'' en la Ec. (3) se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n. \quad (9)$$

Ahora, para igualar los coeficientes de potencias semejantes de $(x - 1)$ debemos expresar x, el coeficiente de y en la Ec. (3), en potencias de $x - 1$; esto es, escribimos $x = 1 + (x - 1)$. Nótese que ésta es precisamente la serie de Taylor para x alrededor de $x = 1$. Entonces la Ec. (9) toma la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1}.$$

Cambiando el índice de suma en la segunda serie sobre el miembro derecho se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n.$$

Igualando coeficientes de potencias semejantes de $x - 1$ obtenemos

$$2a_2 = a_0,$$
$$(3\cdot 2)a_3 = a_1 + a_0,$$
$$(4\cdot 3)a_4 = a_2 + a_1,$$
$$(5\cdot 4)a_5 = a_3 + a_2,$$
$$\vdots$$

La relación general de recurrencia es

$$n(n-1)a_n = a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \text{para} \qquad n \geq 3. \quad (10)$$

Resolviendo para las primeras pocas a_n en términos de a_0 y a_1 nos da

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6},$$
$$a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12},$$
$$a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120},$$
$$\vdots$$

Por lo tanto

$$y = a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right]. \quad (11)$$

En general, cuando la relación de recurrencia tiene tres términos, tal como la dada por la Ec. (10), la determinación de los coeficientes en la solución en serie será bastante complicada. En este ejemplo no es inmediatamente aparente la fórmula para a_n en términos de a_0 y a_1. Sin embargo, aún sin conocer la fórmula para a_n veremos, en la sección 4.2.1, que es posible establecer que la serie en la Ec. (11) converge para toda x, y además definir funciones y_1 y y_2

que sean soluciones linealmente independientes de la ecuación de Airy (3). De aquí que

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

es la solución general de la ecuación de Airy para $-\infty < x < \infty$.

Es importante enfatizar, como vimos en el ejemplo 2, que si buscamos una solución de la Ec. (1) de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, entonces los coeficientes $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ deberán también expresarse en potencias de $(x - x_0)$. Alternativamente, podemos hacer el cambio de variable $x - x_0 = t$, obteniendo una nueva ecuación diferencial para y como función de t y buscando entonces soluciones de esta nueva ecuación de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Cuando hayamos acabado los cálculos reemplazaremos t por $x - x_0$; ver el problema 3.

Otro punto de interés es el siguiente. Las funciones y_1 y y_2 definidas por las series en la Ec. (8) son soluciones linealmente independientes de la Ec. (3) para toda x, y esto es similarmente verdadero para las funciones y_1 y y_2 definidas por las series en la Ec. (11). De acuerdo a la teoría general de ecuaciones lineales de segundo orden, cada una de las primeras dos ecuaciones puede expresarse como una combinación lineal de las últimas dos funciones y viceversa, un resultado que ciertamente no es obvio.

Ejemplo 3. La ecuación de Hermite* es

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{12}$$

donde λ es una constante. Esta ecuación es importante en muchas ramas de la física matemática; por ejemplo, en mecánica cuántica la ecuación de Hermite surge en la investigación de la ecuación de Scroëdinger (1887-1961) para un oscilador armónico.

Para encontrar una solución de la Ec. (12) en la vecindad de un punto ordinario $x = 0$, substituimos las series (4), (5) y (6) para y, y' y y'' en la Ec. (12) obteniendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0.$$

Cambiando el índice de suma en la segunda serie de tal forma que se transforme en $\sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n$ y juntando términos semejantes se obtiene

$$(2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n]x^n = 0.$$

* Charles Hermite (1822-1901) fue un distinguido matemático francés cuyo trabajo en el campo del álgebra fue particularmente elegante.

De aquí que a_0 y a_1 sean arbitrarios, y la relación general de recurrencia es

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n, \qquad n \geq 0. \tag{13}$$

Por lo tanto a_0 determina a_2, la que a su vez determina a_4, la que a su vez determina a_6 y así sucesivamente. Similarmente, los coeficientes de las potencias impares de x son determinadas por la relación de recurrencia (13). La solución formal en serie para la ecuación de Hermite es

$$\begin{aligned} y &= a_0\left[1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[x + \frac{(2-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots\right] \\ &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x). \end{aligned} \tag{14}$$

Otra vez, los resultados de la sección 4.2.1 establecerán la convergencia de estas series para toda x. Si λ es un entero par no negativo, una u otra de las anteriores series se termina. En particular para $\lambda = 0, 2, 4, 6$, respectivamente, una solución de la ecuación de Hermite es 1, x, $1 - 2x^2$, y $x - 2x^3/3$. La solución polinomial correspondiente a $\lambda = 2n$, después de multiplicarse por una constante apropiada,* se conoce como el polinomio de Hermite $H_n(x)$.

PROBLEMAS

1. Procediendo formalmente, encuéntrense dos soluciones en series de potencias linealmente independientes, en potencias de $x - x_0$ para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. ¿Cuál es la relación de recurrencia?

a) $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$

b) $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$

c) $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$

d) $y'' + k^2x^2y = 0; \quad x_0 = 0$, k es una constante

e) $(1 - x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$

f) $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$

* Este proceso se conoce generalmente como normalización. La constante se elige generalmente de tal forma que la solución tenga un valor específico en un punto particular, o tal que cierta integral de la solución, sobre un rango prescrito, tenga un valor definido. Por ejemplo, el polinomio de Hermite de orden n está especificado de manera única por la afirmación de que es una solución polinomial de grado n de la ecuación de Hermite con $\lambda = 2n$, y con el coeficiente de x^n igual a 2^n.

2. Encontrar la solución del problema 1*b*) que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3. Haciendo el cambio de variable $x - 1 = t$, encuéntrense dos soluciones en serie, linealmente independientes de

$$y'' + (x-1)^2 y' + (x^2 - 1)y = 0$$

en potencias de $x - 1$. Muéstrese que puede obtenerse el mismo resultado desarrollando $x^2 - 1$ en una serie de Taylor alrededor de $x = 1$, y substituyendo entonces

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

4. Muéstrese directamente, usando la prueba de la razón, que las soluciones en serie de la ecuación de Airy alrededor de $x = 0$ convergen para toda x. Ver la Ec. (8) del texto.

4.2.1 SOLUCIONES EN SERIE EN LA VECINDAD DE UN PUNTO ORDINARIO, PARTE II

En la sección anterior consideramos el problema de encontrar soluciones de

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{1}$$

donde P, Q y R son polinomios, en la vecindad de un punto ordinario x_0. Suponiendo que la Ec. (1) tiene una solución $y = \phi(x)$, y que ϕ tiene una serie de Taylor

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2}$$

que converge para $|x - x_0| < \rho$, $\rho > 0$, encontramos que la a_n puede determinarse substituyendo directamente la serie (2) para y en la Ec. (1).

Vamos a considerar cómo podemos justificar la afirmación de que si x_0 es un punto ordinario de la Ec. (1), entonces existen soluciones de la forma (2). Consideraremos también la cuestión del radio de convergencia de tales series. Al hacer esto obtendremos una generalización de la definición de un punto ordinario.

Supóngase entonces, que hay una solución de la Ec. (1) de la forma (2). Es claro, al diferenciar la Ec. (2) m veces y hacer $x = x_0$ que

$$m!\, a_m = \phi^{(m)}(x_0).$$

De aquí que, para calcular la a_n en la serie (2), debemos mostrar que podemos determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ de la ecuación diferencial (1). Supóngase que $y = \phi(x)$ es una solución de la Ec. (1) que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Entonces $a_0 = y_0$ y $a_1 = y'_0$.

Si estamos interesados solamente en encontrar la solución de la Ec. (1) sin especificar ningunas condiciones iniciales, entonces a_0 y a_1 serán arbitrarias.

Para determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ y la correspondiente a_n para $n = 2, 3, \ldots$, volvemos a la Ec. (1). Ya que ϕ es una solución de la Ec. (1) tenemos

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0.$$

Para el intervalo alrededor de x_0 para el que P no se anula, podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x) \tag{3}$$

donde $p(x) = Q(x)/P(x)$ y $q(x) = R(x)/P(x)$. Haciendo x igual a x_0 en la Ec. (3) se obtiene

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0).$$

Por lo tanto a_2 está dado por

$$2!\, a_2 = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0. \tag{4}$$

Para determinar a_3 derivamos la Ec. (3) y hacemos entonces x igual a x_0, obteniendo

$$\begin{aligned} \phi'''(x_0) = 3!\, a_3 &= -[p\phi'' + (p' + q)\phi' + q'\phi]_{x=x_0} \\ &= -2!\, p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Substituyendo para a_2 de la Ec. (4) nos da a_3 en términos de a_1 y a_0. Ya que P, Q y R son polinomios y $P(x_0) \neq 0$, todas las derivadas de p y q existen en x_0. Por lo tanto podemos continuar indefinidamente la diferenciación de (3), determinando después de cada diferenciación los coeficientes sucesivos $a_4, \ldots$, etc. haciendo $x = x_0$.

Nótese que la importante propiedad que usamos para determinar las a_n fue que pudimos calcular una infinidad de derivadas de las funciones p y q. Parece ahora bastante razonable relajar nuestra suposición de que las funciones p y q son razones de polinomios, y requerir simplemente que sean infinitamente diferenciables en una vecindad de x_0. Desafortunadamente, esta condición es demasiado débil para asegurar que podamos probar la convergencia de la serie resultante para $y = \phi(x)$. Sin embargo, hay una condición más general que puede requerirse de p y q. Nos permite llevar a cabo los cálculos anteriores para la a_n, y también la convergencia de la solución en serie. Esta condición es que las funciones p y q sean *analíticas* en x_0, esto es, que tengan un desarrollo en *serie de Taylor* que converja en algún intervalo alrededor del punto x_0:

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n, \tag{6}$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots + q_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n. \tag{7}$$

Como se mencionó en la sección 4.1, si cada una de las funciones p y q es un cociente de polinomios, entonces tiene desarrollo en serie* de la forma (6) y (7). Con esta idea en mente podemos generalizar la definición de un punto ordinario y un punto singular de la Ec. (1) como sigue: Si las funciones $p = Q/P$ y $q = R/P$ son analíticas en x_0, se dice entonces que el punto x_0 es un *punto ordinario* de la ecuación diferencial (1); de otra manera se dice que es un *punto singular*.

Volvamos ahora a la cuestión del intervalo de convergencia de la solución en serie. Una posibilidad es calcular realmente la solución en serie de cada problema y aplicar entonces una de las pruebas de convergencia de una serie infinita para determinar el radio de convergencia de la solución en serie. Afortunadamente, la cuestión puede responderse inmediatamente para una gran clase de problemas por medio del siguiente Teorema.

Teorema 4.1. Si x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial (1)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0;$$

esto es, si $p = Q/P$ y $q = R/P$ son analíticas en x_0, entonces la solución general de la Ec. (1) *es*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0y_1(x) + a_1y_2(x),$$

donde a_0 y a_1 son arbitrarias, y y_1 y y_2 son soluciones en serie linealmente independientes que son analíticas en x_0. Además el radio de convergencia para cada una de las soluciones en serie y_1 y y_2 al menos tan grande como el mínimo de los radios de convergencia para l. series correspondientes a p y q. Los coeficientes en las soluciones en serie están determinados a partir de la substitución de la serie (2) *para y en la Ec.* (1).

Nótese de la forma de la solución en serie que $y_1(x) = 1 + b_2(x - x_0)^2 + \cdots$, y $y_2(x) = (x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$. De aquí que y_1 es una solución que satisface las condiciones iniciales $y_1(x_0) = 1, y'_1(x_0) = 0$, y y_2 es una solución que satisface las condiciones iniciales $y_2(x_0) = 0$, $y'_2(x_0) = 1$. Aunque este Teorema, que en una forma ligeramente más general es debido a Fuchs (1833-1902), no es demasiado difícil de probar, está más allá del alcance e intenciones de este libro. Lo que es importante para nuestros propósitos es que el radio de convergencia de la solución en serie no puede ser menor que el menor de los radios de convergencia de las series para p y q; y por lo tanto, sólo necesitamos determinar éstos.

Esto puede hacerse de dos maneras. Otra vez, una posibilidad es simplemente calcular la serie de potencias para p y q, y determinar entonces los radios de convergencia usando una de las pruebas de convergencia para series

* El lector cuidadoso ha llegado probablemente a la conclusión (que es correcta) que si p es de la forma (6), entonces p tiene un número infinito de derivadas en x_0, sin embargo no se puede concluir el resultado inverso. Un ejemplo de una función con un número infinito de derivadas en $x = 0$, pero que no tiene un desarrollo en serie de Taylor, está dado en el problema 8.

infinitas. Sin embargo, hay una manera más fácil cuando P, Q y R son polinomios. Se muestra en la teoría de funciones de variable compleja, que la razón de dos polinomios, digamos Q/P, tendrá un desarrollo convergente en serie de potencias alrededor del punto $x = x_0$ si $P(x_0) \neq 0$. Además, suponiendo que se han cancelado cualesquiera factores comunes de Q y P, el radio de convergencia de la serie de potencias para Q/P alrededor del punto x_0 es precisamente la distancia de x_0 al cero más cercano de P. Al determinar esta distancia debemos recordar que $P(x) = 0$ puede tener raíces complejas, y éstas deberán considerarse también.

Ejemplo 1. ¿Cuál es el radio de convergencia para la serie de Taylor $(1 + x^2)^{-1}$ alrededor de $x = 0$?

Para $x^2 < 1$ sabemos que el desarrollo en serie convergente de potencias para $(1 + x^2)^{-1}$ es

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots.$$

Claramente esta serie diverge para $x^2 > 1$ ya que entonces el enésimo término no tiende a cero cuando $n \to \infty$. De aquí que el radio de convergencia es $\rho = 1$. (Esto puede verificarse por la prueba de la razón.)

Para determinar el radio de convergencia usando la teoría que acabamos de discutir, debemos notar que el polinomio $1 + x^2$ tiene ceros en $x = \pm i$; ya que la distancia de 0 a i en el plano complejo es 1, el radio de convergencia de la serie de potencias alrededor de $x = 0$ es 1.

Ejemplo 2. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor para $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ alrededor de $x = 0$? ¿Alrededor de $x = 1$?

Nótese primero que

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

tiene soluciones $x = 1 \pm i$. La distancia de $x = 0$ ya sea a $x = 1 + i$ o a $x = 1 - i$ en el plano complejo es $\sqrt{2}$; por lo tanto el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, alrededor de $x = 0$ es $\sqrt{2}$.

La distancia de $x = 1$, ya sea a $x = 1 + i$ o $x = 1 - i$ es 1; por lo tanto el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - 1)^n$, alrededor de $x = 1$, es 1.

De acuerdo con el Teorema 4.1 la solución en serie de la ecuación de Airy en los ejemplos 1 y 2, y de la ecuación de Hermite en el ejemplo 3 de la sección anterior, converge para todos los valores de x, $x - 1$, y x respectivamente, ya que en cada problema $P(x) = 1$ y por lo tanto nunca se anula.

Debe enfatizarse que la solución en serie puede converger para un más amplio rango de x que el indicado por el Teorema 4.1, ya que el Teorema nos

da solamente una cota inferior del radio de convergencia de la solución en serie. Esto está ilustrado en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3. Determínese una cota inferior para el radio de convergencia de la solución en serie alrededor de $x = 0$ para la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

donde α es una constante.

Ya que $P(x) = 1 - x^2$, $Q(x) = -2x$, y $R(x) = \alpha(\alpha + 1)$ son polinomios, y los ceros de P, $x = \pm 1$, están a una distancia 1 de $x = 0$, una solución en serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$ convergirá para $|x| < 1$ al menos, y posiblemente para valores mayores de x. En verdad, puede mostrarse que si α es un entero positivo, una de las soluciones en serie se acabará y se cortará después de un número finito de términos y por lo tanto convergirá no solamente para $|x| < 1$ sino para toda x. Por ejemplo, si $\alpha = 1$ la solución polinomial es $y = x$. Ver problemas 10 al 14 al final de esta sección para una discusión más completa de la ecuación de Legendre.

Ejemplo 4. Determínese una cota inferior para el radio de convergencia de la solución en serie de la ecuación diferencial

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0$$

alrededor del punto $x = 0$; alrededor del punto $x = -\frac{1}{2}$.

Otra vez P, Q y R son polinomios, y P tiene ceros en $x = \pm i$. La distancia en el plano complejo de 0 a $\pm i$ es 1, y de $-\frac{1}{2}$ a $\pm i$ es $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{5/2}$. Por lo tanto en el primer caso la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge al menos para $|x| < 1$, y en el segundo caso la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x + \frac{1}{2})^n$ convergirá al menos para $|x + \frac{1}{2}| < \sqrt{5}/2$.

Ejemplo 5. ¿Puede determinarse una solución en serie alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial

$$y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (1 + x^2)y = 0,$$

y si es así, cuál es su radio de convergencia?

Para esta ecuación diferencial $p(x) = \operatorname{sen} x$ y $q(x) = 1 + x^2$. Recordemos de la sección 4.1 que $\operatorname{sen} x$ tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = 0$, que converge para toda x. Además q también tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = 0$ que es precisamente $q(x) = 1 + x^2$, que converge para toda x. De aquí que haya una solución en serie de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con a_0 y a_1 arbitrarias, y la serie converge para toda x.

Finalmente, hay un punto práctico que debe mencionarse. Si las funciones P, Q y R son polinomios, es más conveniente trabajar con la Ec. (1) que dividir entre $P(x)$ para obtener la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Esto evita la necesidad de expresar $p(x) = Q(x)/P(x)$ y $q(x) = R(x)/P(x)$ como series de potencias de la forma (6) y (7) respectivamente. Por ejemplo, para obtener una solución en serie de potencias de x de la ecuación de Legendre del ejemplo 3, es mucho más fácil trabajar con la ecuación

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

que escribirla en la forma

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2}y = 0$$

y desarrollar después $2x/(1 - x^2)$ y $1/(1 - x^2)$ alrededor de $x = 0$, lo que da

$$y'' - 2x(1 + x^2 + x^4 + \cdots)y' + \alpha(\alpha + 1)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)y = 0.$$

PROBLEMAS

1. Determínese $\phi''(x_0)$, $\phi'''(x_0)$ y $\phi^{iv}(x_0)$ para el punto dado x_0 si $y = \phi(x)$ es una solución del problema de valores iniciales dado.

a) $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

b) $y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

c) $x^2y'' + (1 + x)y' + 3(\ln x)y = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$

d) $y'' + x^2y' + (\operatorname{sen} x)y = 0; \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$

En la parte *d)* exprésense $\phi''(0)$, $\phi'''(0)$ y $\phi^{iv}(0)$ en términos de a_0 y a_1.

2. Determine una cota inferior para el radio de convergencia de la solución en series alrededor de cada punto x_0 para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$

b) $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0$

c) $(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$

d) $xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1$

3. Determine una cota inferior para el radio de convergencia de la solución en serie de cada una de las ecuaciones diferenciales en el problema 1 de la sección 4.2.

4. La ecuación diferencial de Chebychev (1821-1894) es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2y = 0,$$

donde α es una constante.

a) Determínense dos soluciones linealmente independientes en potencias de x para $|x| < 1$.

b) Muéstrese que si α es un entero no negativo n, entonces hay una solución polinomial de grado n. Estos polinomios, adecuadamente normali-

zados, son llamados los polinomios de Chebychev. Son muy útiles en problemas que requieren una aproximación polinomial a una función definida sobre $-1 \leq x \leq 1$.

c) Encuéntrese una solución polinomial para cada uno de los casos $n = 0$, 1, 2, y 3.

5. Encuéntrense los tres primeros términos de cada una de las dos soluciones en serie de potencias, linealmente independientes, en potencias de x de

$$y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0.$$

Sugerencia: Desarrolle sen x en serie de Taylor alrededor de $x = 0$, y reténgase un número suficiente de términos para calcular los coeficientes necesarios en $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

6. Encuéntrense los primeros tres términos en cada una de las dos soluciones linealmente independientes en serie de potencias de x de

$$e^x y'' + xy = 0.$$

¿Cuál es el radio de convergencia para cada solución en serie?
Sugerencia: Desarróllese e^x o xe^{-x} en serie de potencias alrededor de $x = 0$.

7. Supóngase que se le dice a usted que x y x^2 son soluciones de la ecuación diferencial $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$. ¿Puede usted decir si $x = 0$ es un punto ordinario o un punto singular?
Sugerencia: Use el Teorema de existencia y unicidad 3.2, y note el valor de x y x^2 en $x = 0$.

*8. Para mostrar que es posible tener una función que es infinitamente derivable en un punto, pero que no tiene desarrollo en serie de Taylor alrededor de ese punto, considere la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Muéstrese, usando la definición de una derivada como el límite de un cociente de diferencias, que f es infinitamente diferenciable en el origen, y que $f^{(n)}(0) = 0$ para toda n. Por lo tanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

se anula para toda x, y converge a $f(x)$ solamente en $x = 0$.

9. El método de series discutido en esta sección es directamente aplicable a la ecuación diferencial lineal de primer orden $P(x)y' + Q(x)y = 0$ en un punto x_0, si la función $p = Q/P$ tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de ese punto. Tal punto es llamado un punto ordinario, y además, el radio de convergencia de la serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ será al menos tan grande como el radio de convergencia de la serie para Q/P. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por series de potencias en x, y verificar que a_0 es arbitrario en cada caso. Los problemas *e*) y *f*) involucran ecuaciones

diferenciales nohomogéneas a las que se puede extender fácilmente el método de series

a) $y' - y = 0$ | *b*) $y' - xy = 0$

c) $y' = e^{x^2} y$, tres términos | *d*) $(1 - x)y' = y$

**e*) $y' - y = x^2$ | **f*) $y' + xy = 1 + x$

Donde sea posible, compárese la solución en serie con la solución obtenida usando los métodos del capítulo 2.

Ecuación de Legendre. Los problemas 10 a 14 tratan de la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

Como se indicó en el ejemplo 3, el punto $x = 0$ es un punto ordinario de esta ecuación, y la distancia del origen al cero más cercano de $P(x) = 1 - x^2$, es 1. De aquí que el radio de convergencia de la solución en serie alrededor de $x = 0$ será al menos 1.

10. Mostrar que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Legendre para $|x| < 1$ son

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4)\cdots(\alpha - 2m + 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3)\cdots(\alpha + 2m - 1)}{(2m)!} x^{2m},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \times \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3)\cdots(\alpha - 2m + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4)\cdots(\alpha + 2m)}{(2m + 1)!} x^{2m+1}.$$

11. Mostrar que si α es cero o un entero par positivo $2n$ la solución en serie para y_1 se reduce a un polinomio de grado $2n$ que contiene solamente potencias pares de x. Muéstrese que correspondiendo a $\alpha = 0$, 2, y 4 estos polinomios son

$$1,\ 1 - 3x^2,\ 1 - 10x^2 + \tfrac{35}{3}x^4.$$

Muéstrese que si α es un entero positivo impar $2n + 1$ entonces la solución en serie para y_2 se reduce a un polinomio de grado $2n + 1$ conteniendo solamente potencias impares de x y que corresponde a $\alpha = 1$, 3, 5. Estos polinomios son

$$x,\ x - \tfrac{5}{3}x^3,\ x - \tfrac{14}{3}x^3 + \tfrac{21}{5}x^5.$$

12. El polinomio de Legendre P_n está definido como la solución polinomial de la ecuación de Legendre con $\alpha = n$ que satisface la condición $P_n(1) = 1$. Muéstrese, usando los resultados del problema 11, que

$$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x,\quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1),\quad P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Puede mostrarse que la fórmula general es

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\, x^{n-2k},$$

donde $[n/2]$ denota el entero mayor, menor que o igual a $n/2$. Muéstrese que $P_n(-1) = (-1)^n$.

13. Mostrar que la ecuación de Legendre puede escribirse también como

$$[(1-x^2)y']' = -\alpha(\alpha+1)y.$$

Se concluye entonces que $[(1-x^2)P'_n(x)]' = -n(n+1)P_n(x)$ y $[(1-x^2)P'_m(x)]' = -m(m+1)P_m(x)$. Mostrar, multiplicando la primera ecuación por $P_m(x)$ y la segunda por $P_n(x)$ e integrando después por partes que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\, dx = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$

Esta propiedad de los polinomios de Legendre se conoce como la propiedad de ortogonalidad. Si $m = n$, puede mostrarse que el valor de la integral anterior es $2/(2n+1)$.

14. Dado un polinomio f de grado n, es posible expresar f como una combinación lineal de $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Mostrar, usando el resultado del problema 13, que

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\, dx.$$

4.3 PUNTOS REGULARES SINGULARES

En esta sección consideraremos la ecuación

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

en la vecindad de un punto singular x_0. Recordemos que si las funciones P, Q y R son polinomios que no tienen factores comunes, los puntos singulares de la Ec. (1) son los puntos para los que $P(x) = 0$.

Ejemplo 1. La ecuación de Bessel de orden ν es

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{2}$$

El punto $x = 0$ es claramente un punto singular ya que $P(x) = x^2$ se anula ahí. Es más, si dividimos la Ec. (2) entre x^2, los coeficientes de y' y y estarán indefinidos en $x = 0$. Todos los otros puntos son puntos ordinarios de la Ec. (2).

Ejemplo 2. Determine los puntos ordinarios y los puntos singulares de la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \tag{3}$$

donde α es una constante.

Los puntos singulares son los ceros de $P(x) = 1 - x^2$, esto es los puntos $x = \pm 1$. Todos los otros puntos son ordinarios.

La solución de la Ec. (1) en la vecindad de un punto singular x_0 frecuentemente se hace muy grande en magnitud, experimenta rápidos cambios en su magnitud o es peculiar de alguna otra forma. De aquí que el comportamiento de un sistema físico gobernado por una ecuación tal es frecuentemente más interesante en la vecindad de un punto singular. A menudo, las singularidades geométricas en un problema físico, tales como esquinas u orillas afiladas, conducen a puntos singulares en la ecuación diferencial correspondiente. Matemáticamente, los puntos singulares de una ecuación diferencial, que usualmente son pocos en número, determinan las características principales de la solución en un grado mucho más grande del que podríamos esperar. Por lo tanto, en lugar de evitar los pocos puntos donde una ecuación diferencial es singular, debemos darnos cuenta de que es precisamente en esos puntos donde es necesario estudiar la solución más cuidadosamente.

Desafortunadamente, si x_0 es un punto singular, los métodos de la sección anterior fallan, y es necesario considerar un tipo más general de desarrollo en serie que la serie de Taylor. Esto está ilustrado por la ecuación diferencial del siguiente ejemplo 3, para la cual una de las soluciones no tiene desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto $x = 0$. Sin ninguna información adicional sobre el comportamiento de Q/P y R/P en la vecindad del punto singular, es imposible describir el comportamiento de las soluciones de la Ec. (1) cerca de $x = x_0$. Puede ser que haya dos soluciones linealmente independientes de la Ec. (1) que permanezcan acotadas cuando $x \to x_0$ o puede haber sólo una que permanezca acotada, mientras la otra se hace no acotada cuando $x \to x_0$, o pueden hacerse ambas no acotadas cuando $x \to x_0$. Para ilustrar esto consideremos los ejemplos siguientes:

Ejemplo 3. La ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2y = 0 \tag{4}$$

tiene un punto singular en $x = 0$. Puede verificarse fácilmente por substitución directa que para $x > 0$ o $x < 0$, $y = x^2$ y $y = 1/x$ son soluciones linealmente independientes de la Ec. (4). Por lo tanto en cualquier intervalo que no contenga al origen, la solución general de la Ec. (4) es $y = c_1x^2 + c_2x^{-1}$. La única solución de la Ec. (4) que es acotada cuando $x \to 0$ es $y = c_1x^2$. Realmente esta solución es analítica en el origen aunque si la Ec. (2) es puesta en la forma estándar $y'' - (2/x^2)y = 0$, la función $q(x) = -2/x^2$ no es analítica en $x = 0$, y el Teorema 4.1 no se puede aplicar. Por otra parte hay

que notar que la solución $y = x^{-1}$ no tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor del origen (no es analítica en $x = 0$); entonces, el método de la sección 4.2 fallará en este caso.

Ejemplo 4. La ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{5}$$

tiene también un punto singular en $x = 0$. Puede verificarse que $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x^2$ son soluciones linealmente independientes de la Ec. (5), y que ambas son analíticas en $x = 0$. Sin embargo, aun así no es propio formular un problema de valores iniciales en $x = 0$. Es imposible prescribir condiciones iniciales arbitrarias en $x = 0$, ya que cualquier combinación lineal de x y x^2 es cero en $x = 0$.

Es posible también construir una ecuación diferencial con un punto singular x_0, tal que cada solución de la ecuación diferencial se haga no acotada cuando $x \to x_0$. Aun si la Ec. (1) no tiene una solución que permanezca acotada cuando $x \to x_0$, es importante a menudo determinar cómo se comportan las soluciones de la Ec. (1) cuando $x \to x_0$; por ejemplo, ¿tiende $y \to \infty$ de la misma forma como lo hacen $(x - x_0)^{-1}$ o $|x - x_0|^{-1/2}$, o de manera diferente?

Para desarrollar una teoría matemáticamente razonablemente simple para resolver la Ec. (1) en la vecindad de un punto singular x_0, es necesario restringirnos a casos en los que las singularidades de las funciones Q/P y R/P en $x = x_0$ no sean muy severas, esto es, a las llamadas "singularidades débiles". A priori, no es exactamente claro lo que es una singularidad aceptable. No obstante, veremos en la próxima sección (ver sección 4.5.1, problemas 5 y 6) que si P, Q y R son polinomios, las condiciones que distinguen a las "singularidades débiles" son

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{es finito} \tag{6}$$

y

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{es finito} \tag{7}$$

Esto significa que la singularidad en Q/P no puede ser peor que $(x - x_0)^{-1}$ y que la singularidad en R/P no puede ser peor que $(x - x_0)^{-2}$. Tal punto es llamado un *punto regular singular* de la Ec. (1). Para funciones más generales que los polinomios, x_0 es un *punto regular singular* de la Ec. (1) si es un punto singular, y si tanto*

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{como} \quad (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \tag{8}$$

* Las funciones dadas en la Ec. (8) pueden no estar definidas en x_0, en cuyo caso sus valores en x_0 deben tomarse iguales a sus límites cuando $x \to x_0$.

tienen series de Taylor convergentes alrededor de x_0, esto es, si las funciones en la Ec. (8) son analíticas en $x = x_0$. Las ecuaciones (6) y (7) implican que éste será el caso cuando P, Q y R sean polinomios. Cualquier punto singular de la Ec. (1) que no es un punto regular singular se llama un *punto singular irregular* de la Ec. (1).

En las secciones siguientes discutiremos cómo resolver la Ec. (1) en la vecindad de un punto regular singular. Una discusión de las soluciones de ecuaciones diferenciales en la vecindad de puntos singulares irregulares queda fuera del alcance de un texto elemental.

Ejemplo 5. Determine los puntos singulares de la ecuación diferencial

$$2(x - 2)^2xy'' + 3xy' + (x - 2)y = 0,$$

y clasifíquelos como regulares o irregulares.

Dividiendo entre $2(x - 2)^2x$ tenemos

$$y'' + \frac{3}{2(x - 2)^2} y' + \frac{1}{2(x - 2)x} y = 0,$$

tal que $p(x) = 3/2(x - 2)^2$ y $q(x) = 1/2x(x - 2)$. Los puntos singulares son $x = 0$ y $x = 2$. Considérese $x = 0$. Tenemos

$$\lim_{x \to 0} xp(x) = \lim_{x \to 0} x \frac{3}{2(x - 2)^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^2q(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{1}{2x(x - 2)} = 0;$$

por lo tanto $x = 0$ es un punto regular singular.

Para $x = 2$ tenemos

$$\lim_{x \to 2} (x - 2)p(x) = \lim_{x \to 2} (x - 2) \frac{3}{2(x - 2)^2}$$

no existe; de aquí que $x = 2$ es un punto singular irregular.

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8 determine cuál de los puntos -1, 0 y 1 es un punto ordinario, un punto regular singular, o un punto singular irregular para la ecuación diferencial dada.

1. $xy'' + (1 - x)y' + xy = 0$
2. $x^2(1 - x^2)y'' + 2xy' + 4y = 0$
3. $2x^4(1 - x^2)y'' + 2xy' + 3x^2y = 0$
4. $x^2(1 - x^2)y'' + \frac{2}{x}y' + 4y = 0$

5. $(1 - x^2)^2y'' + x(1 - x)y' + (1 + x)y = 0$

6. $y'' + \left(\frac{x}{1 - x}\right)^2 y' + 3(1 + x)^2y = 0$

7. $(x + 3)y'' - 2xy' + (1 - x^2)y = 0$

8. $x(1 - x^2)^3y'' + (1 - x^2)^2y' + 2(1 + x)y = 0$

9. Suponiendo que la función f definida por $f(x) = x^{-1}$ sen x para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ es analítica en $x = 0$, mostrar que $x = 0$ es un punto regular singular de la ecuación diferencial

$$(\operatorname{sen} x)y'' + xy' + 4y = 0,$$

y un punto singular irregular de la ecuación diferencial

$$(x \operatorname{sen} x)y'' + 3y' + xy = 0.$$

*10. Las definiciones de un punto ordinario y un punto regular singular dadas en las secciones precedentes se aplican solamente si el punto x_0 es finito. En un trabajo más avanzado de ecuaciones diferenciales, es a veces necesario discutir el punto al infinito. Esto se hace haciendo el cambio de variable $\xi = 1/x$ y estudiando la ecuación resultante $\xi = 0$. Mostrar que para la ecuación diferencial $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ el punto al infinito es un punto ordinario si

$$\frac{1}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{y} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4 P(1/\xi)}$$

tienen desarrollo en serie de Taylor alrededor de $\xi = 0$. Mostrar también que el punto al infinito es un punto regular singular si una u otra de las funciones anteriores no tiene un desarrollo en serie de Taylor, pero tanto

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{y} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

tienen tales desarrollos.

*11. Determine para las siguientes ecuaciones diferenciales si el punto al infinito es un punto ordinario, un punto singular regular, o un punto singular irregular.

a) La ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

b) La ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

c) La ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

d) La ecuación de Airy

$$y'' - xy = 0$$

4.4 ECUACIONES DE EULER

Uno de los ejemplos más simples de una ecuación diferencial que tenga un punto regular singular es la *ecuación de Euler o ecuación equidimensional*

$$L[y] = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x\frac{dy}{dx} + \beta y = 0, \tag{1}$$

donde α y β son constantes. A menos de que se establezca otra cosa, consideraremos que α y β son reales. Es fácil ver que $x = 0$ es un punto singular regular de la Ec. (1). Debido a que la solución de la ecuación de Euler es típica para la solución de todas las ecuaciones diferenciales que puntos regulares singulares, es importante considerar esta ecuación en detalle antes de discutir el problema más general.

En cualquier intervalo que no incluya al origen, la Ec. (1) tiene una solución general de la forma $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ donde y_1 y y_2 son linealmente independientes. Por conveniencia consideraremos primero el intervalo $x > 0$, extendiendo nuestros resultados posteriormente al intervalo $x < 0$. Primero, notemos que $(x^r)' = rx^{r-1}$ y $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$. De aquí que, si suponemos que la Ec. (1) tiene una solución de la forma*

$$y = x^r, \tag{2}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta x^r \\ &= x^rF(r), \end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$F(r) = r(r - 1) + \alpha r + \beta. \tag{4}$$

Si r es una raíz de la ecuación cuadrática $F(r) = 0$, entonces $L[x^r]$ es cero, y $y = x^r$ es una solución de la Ec. (1). Las raíces de $F(r) = 0$ son

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-(\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}}{2}, \\ r_2 &= \frac{-(\alpha - 1) - \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}}{2}, \end{aligned} \tag{5}$$

y $F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. Justamente como en el caso de la ecuación diferencial de segundo orden, lineal, con coeficientes constantes (ver sección 3.5) debemos examinar separadamente los casos $(\alpha - 1)^2 - 4\beta$ positivo, cero, y negativo. Realmente, la teoría completa presentada en esta sección es similar a la teoría para ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes. En este caso x^r reemplaza a e^{rx}. Ver problemas 4 y 5.

* Esta suposición está sugerida también por el hecho de que la ecuación de Euler de primer orden $xy' + ky = 0$ tiene la solución $y = x^{-k}$.

Caso 1. $(\alpha-1)^2-4\beta>0$. En este caso, las Ecs. (5) dan dos raíces reales desiguales r_1 y r_2. Ya que $W(x^{r_1}, x^{r_2})$ no se anula para $r_1 \neq r_2$ y $x>0$ se concluye que la solución general de la Ec. (1) es

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}, \qquad x > 0. \tag{6}$$

Nótese que si r_1 no es un número racional, entonces x^{r_1} está definido por $x^{r_1}=e^{r_1 \ln x}$.

Ejemplo 1. Resolver

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{7}$$

Substituyendo $y=x^r$ tenemos

$$x^r(2r^2 + r - 1) = 0,$$

$$x^r(2r - 1)(r + 1) = 0.$$

De aquí que $r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=-1$, y la solución general es

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1}, \qquad x > 0. \tag{8}$$

Caso 2. $(\alpha-1)^2-4\beta=0$. En este caso, de acuerdo a la Ec. (5), $r_1=r_2=-(\alpha-1)/2$, y tenemos solamente una solución $y_1(x)=x^{r_1}$, de la ecuación diferencial. Puede obtenerse una segunda solución por el método de la reducción de orden, pero para propósitos futuros consideraremos un método alternativo. Ya que $r_1=r_2$, se concluye que $F(r)=(r-r_1)^2$. De aquí que en este caso no solamente $F(r_1)=0$, sino que también $F'(r_1)=0$. Esto nos sugiere derivar la Ec. (3) con respecto a r y poner entonces $r=r_1$. Derivando la Ec. (3) con respecto a r se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r}[x^rF(r)].$$

Substituyendo para $F(r)$, intercambiando la derivación con respecto a x y a r, y notando que $\partial(x^r)/\partial r = x^r \ln x$, obtenemos

$$L[x^r \ln x] = (r - r_1)^2x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r. \tag{9}$$

El miembro derecho de la Ec. (9) se anula para $r=r_1$; consecuentemente

$$y_2(x) = x^{r_1} \ln x, \qquad x > 0, \tag{10}$$

es una segunda solución de la Ec. (1). Ya que x^{r_1} y $x^{r_1} \ln x$ son linealmente independientes para $x>0$, la solución general de la Ec. (1) es

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}, \qquad x > 0. \tag{11}$$

Ejemplo 2. Resolver

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x > 0. \tag{12}$$

Substituyendo $y=x^r$ nos da $x^r(r^2+4r+4)=0$. De aquí que $r_1=r_2=-2$, y la solución general sea

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \qquad x > 0. \tag{13}$$

Caso 3. $(\alpha-1)^2-4\beta<0$. En este caso las raíces r_1 y r_2 son complejas conjugadas, digamos $r_1=\lambda+i\mu$ y $r_2=\lambda-i\mu$. Debemos ahora explicar qué significa x^r cuando r es compleja. Recordando que cuando $x>0$ y r es real podemos escribir

$$x^r = e^{r \ln x}, \tag{14}$$

podemos usar esta definición para *definir* x^r cuando r es compleja. Entonces

$$\begin{aligned} x^{(\lambda+i\mu)} &= e^{(\lambda+i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x}e^{i\mu \ln x} \\ &= x^\lambda e^{i\mu \ln x} \\ &= x^\lambda\{\cos(\mu \ln x) + i \operatorname{sen}(\mu \ln x)\}, \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Con esta definición de x^r para valores complejos de r, se puede verificar que las leyes usuales del álgebra y el cálculo diferencial valen, y por lo tanto x^{r_1} y x^{r_2} son realmente soluciones de la Ec. (1). La solución general de la Ec. (1) es

$$y = c_1x^{\lambda+i\mu} + c_2x^{\lambda-i\mu}. \tag{16}$$

La desventaja de esta expresión es que las funciones $x^{\lambda+i\mu}$ y $x^{\lambda-i\mu}$ son de valores complejos. Recordemos que tuvimos una situación similar para la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes cuando las raíces de la ecuación auxiliar fueron complejas. De la misma manera que hicimos entonces, observaremos ahora que las partes reales e imaginarias de $x^{\lambda+i\mu}$,

$$x^\lambda \cos(\mu \ln x) \qquad \text{y} \qquad x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x) \tag{17}$$

son soluciones linealmente independientes de la Ec. (1). Por lo tanto, para el caso de raíces complejas, la solución general de la Ec. (1) es

$$y = c_1x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x), \qquad x > 0. \tag{18}$$

Ejemplo 3. Resolver

$$x^2y'' + xy' + y = 0. \tag{19}$$

Substituyendo $y=x^r$ se tiene

$$x^r[r(r - 1) + r + 1] = 0.$$

De aquí que $r=\pm i$, y la solución general es

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x), \qquad x > 0. \tag{20}$$

Vamos ahora a considerar el intervalo $x < 0$. La dificultad aquí está en explicar qué es lo que significa x^r cuando x es negativo, y r no es un entero; similarmente $\ln x$ no está definido para $x < 0$. Las soluciones de la ecuación de Euler que tenemos dadas para $x > 0$, puede mostrarse que son válidas para $x < 0$, pero generalmente serán de valores complejos. De aquí que, en el ejemplo 1, la solución $x^{1/2}$ es imaginaria para $x < 0$.

Siempre es posible obtener una solución de valores reales de la ecuación de Euler (1) en el intervalo $x < 0$ haciendo el siguiente cambio de variable. Dado $x = -\xi$; entonces $x < 0$ implica que $\xi > 0$; además

$$\frac{d}{dx} = (-1)\frac{d}{d\xi}, \qquad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}. \tag{21}$$

Con este cambio de variable, la Ec. (1) toma la forma

$$\xi^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha\xi\frac{du}{d\xi} + \beta u = 0, \qquad \xi > 0, \tag{22}$$

donde, para evitar confusión, hemos introducido una nueva variable dependiente u. Pero hemos resuelto la Ec. (22) para $\xi > 0$; por lo tanto u está dada por la Ec. (6), (11) o (18) según si $(\alpha - 1)^2 - 4\beta$ sea mayor que, igual a, o menor que cero, respectivamente, reemplazando x por ξ. Ahora, ya que $\xi = -x$, y

$$|x| = \begin{cases} x & \text{para} \quad x > 0, \\ -x = \xi & \text{para} \quad x < 0, \end{cases} \tag{23}$$

se concluye que solamente necesitamos reemplazar x por $|x|$ en las Ecs. (6), (11) y (18) para obtener soluciones de valores reales válidas en cualquier intervalo que no contenga al origen. Estos resultados se sumarizan en el siguiente Teorema.

Teorema 4.2. Para resolver la ecuación de Euler (1)

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

en cualquier intervalo que no contenga al origen, substitúyase $y = x^r$ *y calcúlense las raíces* r_1 *y* r_2 *de la ecuación*

$$F(r) = r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0.$$

Si las raíces son reales y desiguales

$$y = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}. \tag{24}$$

Si las raíces son reales e iguales

$$y = (c_1 + c_2 \ln|x|)|x|^{r_1}. \tag{25}$$

Si las raíces son complejas

$$y = |x|^{\lambda}[c_1\cos(\mu\ln|x|) + c_2\operatorname{sen}(\mu\ln|x|)] \tag{26}$$

donde $r_1, r_2 = \lambda + i\mu$.

Para una ecuación de Euler de la forma

$$(x - x_0)^2y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0, \tag{27}$$

la situación es exactamente la misma. Uno busca soluciones de la forma $y = (x - x_0)^r$. La solución general está dada ya sea por la Ec. (24), (25) o (26) reemplazando a x por $(x - x_0)$. Alternativamente podemos reducir la Ec. (27) a la forma de la Ec. (1) haciendo el cambio de variable independiente $t = x - x_0$.

La situación para una ecuación diferencial general de segundo orden con un punto regular singular es similar a la de una ecuación de Euler. Consideraremos este problema en la sección siguiente.

PROBLEMAS

1. Determinar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden, que sea válida en cualquier intervalo que no contenga al punto singular.

a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ *b*) $x^2y'' + 3xy' + \frac{3}{4}y = 0$
c) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ *d*) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
e) $x^2y'' - xy' + y = 0$ *f*) $(x-1)^2y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$
g) $x^2y'' + 6xy' - y = 0$ *h*) $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
i) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ *j*) $(x-2)^2y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$
k) $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$ *l*) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

2. Usando el método de reducción de orden, mostrar que si r_1 es una raíz repetida de $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$, entonces x^{r_1} y $x^{r_1}\ln x$ son soluciones de

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \qquad x > 0.$$

3. Encontrar todos los valores de α para los que todas las soluciones de $x^2y'' + \alpha xy' + \frac{5}{2}y = 0$ tienden a cero cuando $x \to 0$.

4. La ecuación de Euler de segundo orden $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ puede reducirse a una ecuación de segundo orden lineal con coeficientes constantes con un cambio apropiado de la variable independiente. Recordando que x^r juega el mismo papel para la ecuación de Euler que $e^{rx} = (e^x)^r$ lo juega para la ecuación con coeficientes constantes, debería aparecer razonable hacer el cambio de variable $x = e^z$, o $z = \ln x$. Considérese solamente el intervalo $x > 0$.

a) Mostrar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}.$$

b) Mostrar que la ecuación de Euler se transforma en

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = 0.$$

Si denotamos por r_1 y r_2 las raíces de $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$, mostrar que

c) Si r_1 y r_2 son reales y desiguales, entonces

$$y = c_1e^{r_1z} + c_2e^{r_2z} = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2},$$

d) Si r_1 y r_2 son iguales, entonces

$$y = (c_1 + c_2 z)e^{r_1 z} = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1},$$

e) Si r_1 y r_2 son complejo conjugadas, $r_1 = \lambda + i\mu$, entonces

$$y = e^{\lambda z}(c_1 \cos \mu z + c_2 \operatorname{sen} \mu z) = x^{\lambda}[c_1 \cos (\mu \ln x) + c_2 \operatorname{sen} (\mu \ln x)].$$

5. Usando el método del problema 4, resolver las siguientes ecuaciones diferenciales para $x > 0$.

a) $x^2y'' - 2y = 0$ *b*) $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x$

c) $x^2y'' + 7xy' + 5y = x$ *d*) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2 \ln x$

e) $x^2y'' + xy' + 4y = \operatorname{sen} (\ln x)$ *f*) $3x^2y'' + 12xy' + 9y = 0$

4.5 SOLUCIONES EN SERIE EN LA VECINDAD DE UN PUNTO REGULAR SINGULAR, PARTE I

Consideraremos ahora el asunto de resolver la ecuación de segundo orden general y lineal

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

en la vecindad de un punto regular singular $x = x_0$. Por conveniencia supondremos que $x_0 = 0$. Si $x_0 \neq 0$ la ecuación puede transformarse en una para la que el punto regular singular está en el origen. Esto lo podemos hacer poniendo $x - x_0$ igual a z.

El hecho de que $x = 0$ es un punto regular singular de la Ec. (1) significa que $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ y $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ tienen límites finitos cuando $x \to 0$, y son analíticas en $x = 0$ teniendo desarrollos en series de potencias de la forma

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

que son convergentes para algún intervalo $|x| < \rho$, $\rho > 0$, alrededor del origen. Es conveniente por propósitos teóricos dividir la Ec. (1) entre $P(x)$ y multiplicarla entonces por x^2, obteniendo

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \tag{3a}$$

ó

$$x^2y'' + x(p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots)y' + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots)y = 0. \tag{3b}$$

Si todas las p_n y q_n son cero excepto

$$p_0 = \lim_{x \to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)}, \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)},$$

entonces la Ec. (3) se reduce a la ecuación de Euler

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0,$$

que fue discutida en la sección anterior. En general, por supuesto, algunas de las p_n y q_n, $n \geq 1$, no serán cero. Sin embargo, para x cercano a cero el carácter esencial de las soluciones de la Ec. (3) es idéntico al de las soluciones de la ecuación de Euler. La presencia de los términos variables $xp(x)$ y $x^2q(x)$ simplemente complica los cálculos.

Restringiremos inicialmente nuestra discusión al intervalo $x > 0$. Este intervalo $x < 0$ puede tratarse, justamente como para la ecuación de Euler, haciendo el cambio de variable $x = -\xi$ y resolviendo entonces la ecuación resultante para $\xi > 0$.

Ya que los coeficientes en la Ec. (3) son "coeficientes de Euler" multiplicados por series de potencias, es natural buscar soluciones de la forma de las "soluciones de Euler" multiplicadas por series de potencias:

$$y = x^r(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \tag{4}$$

Como parte de nuestro problema tenemos que determinar:

1. Los valores de r para los que la Ec. (1) tiene una solución de la forma (4).

2. La relación de recurrencia para las a_n.

3. El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

Encontraremos que la Ec. (1) tendrá siempre al menos una solución de la forma (4) con a_0 arbitraria, y posiblemente una segunda solución correspondiente a un segundo valor de r. Si no hay una segunda solución de la forma (4), la segunda solución involucrará un término logarítmico, justamente como sucedió con la segunda solución de la ecuación de Euler cuando las raíces fueron iguales. En teoría, por supuesto, una vez que obtenemos la primera solución, que será de la forma (4), se puede obtener una segunda solución por el método de la reducción de orden. Infortunadamente, éste no es siempre un método conveniente para obtener una segunda solución; daremos un método alternativo en las secciones 4.5.1 y 4.6.

La teoría general es debida al matemático alemán Frobenius (1849-1917) y es bastante complicada. Más bien que tratar de presentar esta teoría aquí, simplemente supondremos en ésta y las siguientes secciones, que existe una solución de la forma establecida. En particular supondremos que cualquier serie de potencias en una expresión para una solución tiene un radio de convergencia diferente de cero, y nos concentraremos en mostrar cómo determinar los coeficientes de tales series.

Ilustraremos primero el método de Frobenius para una ecuación diferencial específica que tiene dos soluciones de la forma (4). Considérese la ecuación

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0. \tag{5}$$

Por comparación con la Ec. (3), es claro que $x = 0$ es un punto regular singular de la Ec. (5). Trataremos formalmente de encontrar una solución de la Ec. (5) de la forma (4) para $x > 0$. Entonces y' y y'' están dadas por

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n-1}, \tag{6}$$

y

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n-2}. \tag{7}$$

De aquí que

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1}.$$

Nótese que la última suma puede escribirse en la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{r+n}$ y combinando términos nos da

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = a_0[2r(r - 1) - r + 1]x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\{[2(r + n)(r + n - 1) - (r + n) + 1]a_n + a_{n-1}\}x^{r+n} = 0. \tag{8}$$

Para que la Ec. (8) se satisfaga idénticamente, el coeficiente de cada potencia de x en la Ec. (8) debe ser cero. Correspondiendo a x^r obtenemos, ya que $a_0 \neq 0$,*

$$2r(r - 1) - r + 1 = 0; \tag{9}$$

y del coeficiente de x^{r+n} tenemos

$$[2(r + n)(r + n - 1) - (r + n) + 1]a_n + a_{n-1} = 0, \qquad n \geq 1. \tag{10}$$

La ecuación (9) se llama la *ecuación indicial* para la Ec. (5). Es una ecuación cuadrática en r, y sus raíces determinan los dos valores posibles de r para los que puede haber soluciones de la Ec. (5) de la forma (4). Factorizando la Ec. (9) se obtiene $(2r - 1)(r - 1) = 0$; por lo tanto las raíces de la ecuación indicial son

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = \tfrac{1}{2}. \tag{11}$$

En lo que sigue, cada vez que las raíces de la ecuación indicial sean reales y diferentes, denotaremos la mayor de ellas por r_1. Las raíces de la ecuación indicial son llamadas a menudo los *exponentes de singularidad* en el punto regular singular.

* No se gana nada tomando $a_0 = 0$, ya que esto significa simplemente que la serie principia con el término a_1x^{r+1} o, si $a_1 = 0$, el término a_2x^{r+2}, y así sucesivamente. Supóngase que el primer término diferente de cero es a_mx^{r+m}; esto es equivalente a usar la serie (4) con r reemplazado por $r + m$ y a_m reemplazado por a_0. Realmente se elige r de tal forma que sea la potencia más baja de x que aparece en la serie y tomamos $a_0 \neq 0$ como su coeficiente.

La ecuación (10) da una relación de recurrencia para los coeficientes a_n. Correspondiendo a $r = r_1 = 1$, tenemos, haciendo la transposición a a_{n-1} y dividiendo entre el coeficiente de a_n:

$$a_n = \frac{-1}{2(n + 1)n - (n + 1) + 1}\, a_{n-1}, \qquad n \geq 1$$
$$= \frac{-1}{(2n + 1)n}\, a_{n-1}.$$

De aquí que

$$a_n = \frac{-1}{(2n + 1)n} \cdot \frac{-1}{(2n - 1)(n - 1)}\, a_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$= \frac{(-1)^n}{(2n + 1)n(2n - 1)(n - 1)\cdots(5 \cdot 2)(3 \cdot 1)}\, a_0. \tag{12}$$

Por lo tanto una solución de la Ec. (5), omitiendo la constante multiplicativa a_0 es

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n + 1)n(2n - 1)(n - 1)\cdots(5 \cdot 2)(3 \cdot 1)}\right], \qquad x > 0. \tag{13}$$

Para determinar el radio de convergencia de la serie en la Ec. (13) usamos la prueba de la razón

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(2n + 3)(n + 1)} = 0$$

para toda x. Entonces la serie converge para toda x.

Correspondiendo a la segunda raíz $r = r_2 = \frac{1}{2}$ de la ecuación indicial, obtenemos de la relación de recurrencia (10)

$$a_n = \frac{-1}{2(n + \frac{1}{2})(n - \frac{1}{2}) - (n + \frac{1}{2}) + 1}\, a_{n-1}$$
$$= \frac{-1}{2n(n - \frac{1}{2})}\, a_{n-1}$$
$$= \frac{-1}{2n(n - \frac{1}{2})}\, \frac{-1}{(2n - 2)(n - \frac{3}{2})}\, a_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$= \frac{(-1)^n}{2n(n - \frac{1}{2})(2n - 2)(n - \frac{3}{2})\cdots(4 \cdot \frac{3}{2})(2 \cdot \frac{1}{2})}\, a_0, \qquad n \geq 1. \tag{14}$$

Omitiendo otra vez la constante multiplicativa a_0, obtenemos una segunda solución

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n(n - \frac{1}{2})(2n - 2)(n - \frac{3}{2}) \cdots (4 \cdot \frac{3}{2})(2 \cdot \frac{1}{2})}\right], \qquad x > 0. \tag{15}$$

Como antes, podemos mostrar que la serie en la Ec. (15) converge para toda x. Ya que los términos principales en las soluciones en serie y_1 y y_2 son x y $x^{1/2}$ respectivamente, es claro que las soluciones son linealmente independientes. Por lo tanto la solución general de la Ec. (5) es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad x > 0.$$

El mismo método puede usarse para resolver la ecuación general (3a) y, en muchos casos, se pueden encontrar dos soluciones linealmente independientes de la forma (4). Sin embargo, hay dos posibles fuentes de dificultades. La primera, que es completamente evidente, se encuentra si las raíces de la ecuación indicial son iguales. La segunda, menos evidente, ocurre cuando las raíces de la ecuación indicial difieren por un entero. Estos casos serán discutidos brevemente en la siguiente sección. Por supuesto, ni uno ni otro de los dos casos pueden encontrarse si las raíces de la ecuación indicial son complejas. Por otra parte, si r_1 y r_2 son complejas, las soluciones correspondientes serán de valores complejos. Sin embargo, justamente como ocurre para la ecuación de Euler, es posible obtener soluciones de valores reales tomando las partes reales e imaginarias de las soluciones originales.

Finalmente, como se apuntó al final de la sección 4.2.1, si las funciones P, Q y R son polinomios, es mucho mejor trabajar directamente con la Ec. (1) que con la Ec. (3). Esto evita la necesidad de expresar $xQ(x)/P(x)$ y $x^2R(x)/P(x)$ como series de potencias.

PROBLEMAS

1. Mostrar que cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales tiene un punto regular singular en $x = 0$. Determínese la ecuación indicial, la relación de recurrencia y las raíces de la ecuación indicial. Encuéntrese la solución en serie ($x > 0$) correspondiente a la raíz mayor. Si las raíces son desiguales y no difieren por un entero, encuéntrese la solución en serie que corresponde a la raíz menor.

a) $2xy'' + y' + xy = 0$ *b*) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$

c) $xy'' + y = 0$ *d*) $xy'' + y' - y = 0$

e) $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$ *f*) $x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0$

2. La ecuación de Legendre de orden α es

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

La solución de esta ecuación cerca del punto ordinario $x = 0$ se discutió en los problemas 10 y 11 de la sección 4.2.1. Muéstrese que $x = \pm 1$ son puntos regulares singulares. Determínense la ecuación indicial y sus raíces para el punto $x = 1$. Encuéntrese una solución en serie de potencias de $x - 1$ para $x - 1 > 0$.

Sugerencia: Escríbase $1 + x = 2 + (x - 1)$, y $x = 1 + (x - 1)$. Alternativamente, hágase el cambio de variable $x - 1 = z$ y determínese una solución en serie de potencias de z.

3. La ecuación diferencial de Laguerre (1834-1886) es

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

Mostrar que $x = 0$ es un punto regular singular. Determinar la ecuación indicial, sus raíces, la relación de recurrencia, y una solución ($x > 0$). Mostrar que si $\lambda = m$ es un entero positivo, su solución se reduce a un polinomio. Cuando se normaliza apropiadamente, este polinomio se conoce como el polinomio de Laguerre, $L_m(x)$.

4. La ecuación de Bessel de orden cero es

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

Mostrar que $x = 0$ es un punto regular singular; que las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = r_2 = 0$; y que una solución para $x > 0$ es

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Nótese que la serie converge para toda x, no justamente para $x > 0$. La función J_0 se conoce como la función de Bessel de primera clase y de orden cero.

5. De acuerdo al problema 4 mostrar, usando el método de reducción de orden, que la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero, contendrá un término logarítmico.
Sugerencia: Si $y_2(x) = J_0(x)v(x)$, entonces

$$y_2(x) = J_0(x)\int^x \frac{\exp\left(-\int^s dt/t\right)}{[J_0(s)]^2}\, ds = J_0(x)\int^x \frac{ds}{s[J_0(s)]^2}.$$

Encuéntrese el primer término en el desarrollo en serie para $1/s[J_0(s)]^2$.

6. La ecuación de Bessel de orden uno es

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

a) Mostrar que $x = 0$ es un punto regular singular; que las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$; y que una solución para $x > 0$ es

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n + 1)!\, n!\, 2^{2n}}.$$

Nótese como en el problema 4 que la serie realmente converge para toda x. La función J_1 se conoce como la función de Bessel de primera clase de orden uno.

b) Muéstrese que es imposible determinar una segunda solución de la forma

$$x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0.$$

*4.5.1 SOLUCIONES EN SERIE EN LA VECINDAD DE UN PUNTO REGULAR SINGULAR, PARTE II

Vamos a considerar ahora el problema general de determinar una solución de la ecuación

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0 \tag{1}$$

donde

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad \text{y} \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

y ambas series tienen radios de convergencia diferentes de cero [ver la Ec. (3) de la sección 4.5]. El punto $x = 0$ es un punto regular singular. Por conveniencia, supondremos primero que $x > 0$, y buscaremos en una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}. \tag{2}$$

Substituyendo en la Ec. (1) se tiene

$$\begin{aligned} a_0r(r-1)x^r &+ a_1(r+1)rx^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \cdots \\ &+ (p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots) \\ &\qquad \times [a_0rx^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)x^{r+n} + \cdots] \\ &+ (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots) \\ &\qquad \times (a_0x^r + a_1x^{r+1} + \cdots + a_nx^{r+n} + \cdots) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Haciendo las multiplicaciones que aparecen indicadas y colectando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} a_0F(r)x^r &+ [a_1F(r+1) + a_0(p_1r + q_1)]x^{r+1} \\ &+ \{a_2F(r+2) + a_0(p_2r + q_2) + a_1[p_1(r+1) + q_1]\}x^{r+2} \\ &+ \cdots + \{a_nF(r+n) + a_0(p_nr + q_n) + a_1[p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}] \\ &\qquad + \cdots + a_{n-1}[p_1(r+n-1) + q_1]\}x^{r+n} \cdots = 0, \end{aligned}$$

o en una forma más compacta

$$a_0F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]\right\}x^{r+n} = 0, \tag{4}$$

donde

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0. \tag{5}$$

Si queremos que la Ec. (4) se satisfaga idénticamente, el coeficiente de cada potencia de x deberá ser cero. Ya que $a_0 \neq 0$, el término que involucra a x^r conduce a la ecuación indicial $F(r) = 0$. Denotemos las raíces de la ecuación

indicial por r_1 y r_2 con $r_1 \geq r_2$ si las raíces son reales. Si las raíces son complejas el orden es irrelevante. Solamente para estos valores de r puede esperarse encontrar soluciones de la Ec. (1) de la forma (2).

Poniendo el coeficiente de x^{r+n} en la Ec. (4) igual a cero, obtenemos la relación de recurrencia

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0. \tag{6}$$

La ecuación (6) muestra que, en general, a_n depende de todos los coeficientes precedentes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Muestra también, que podemos calcular sucesivamente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en términos de los coeficientes en la serie para $xp(x)$ y $x^2q(x)$ siempre y cuando $F(r+1), F(r+2), \ldots, F(r+n)$ no se anulen. Los únicos valores de r para los que $F(r)$ se anula son $r = r_1$ y $r = r_2$; ya que $r_1 + n$ no es igual a r_1 o r_2 para $n \geq 1$, se concluye que $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$. Por lo tanto siempre podemos determinar una solución

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n. \tag{7}$$

Aquí hemos introducido la notación $a_n(r_1)$ para indicar que la a_n ha sido determinada de la Ec. (6) con $r = r_1$. También, para que esté bien definida, tomamos a la a_0 como uno.

Si r_2 es diferente de r_1, y $r_1 - r_2$ no es un entero positivo, entonces $r_2 + n$ es diferente de r_1 para cualquier valor de $n \geq 1$; de aquí que $F(r_2 + n) \neq 0$, y podamos obtener una segunda solución

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n. \tag{8}$$

Antes de continuar haremos algunas observaciones acerca de las soluciones en serie (7) y (8). Dentro de sus radios de convergencia, las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ definen funciones que son analíticas en $x = 0$. Por lo tanto el comportamiento singular, si lo hay, de las soluciones y_1 y y_2 está determinado por los términos x^{r_1} y x^{r_2} que multiplican a estas dos funciones analíticas respectivamente. Para obtener soluciones de valores reales para $x < 0$, podemos hacer la substitución $x = -\xi$ con $\xi > 0$. Como podemos esperar de nuestra discusión de la ecuación de Euler, vemos que solamente necesitamos reemplazar x^{r_1} en la Ec. (7) y x^{r_2} en la Ec. (8) por $|x|^{r_1}$ y $|x|^{r_2}$ respectivamente. Finalmente notamos que si r_1 y r_2 son números complejos, son necesariamente conjugados complejos y $r_2 \neq r_1 + N$. Por lo tanto seremos capaces de calcular dos soluciones en serie de la forma (2); sin embargo, serán funciones de valores complejos de x. Soluciones de valores reales pueden obtenerse tomando las partes reales e imaginarias de y_1 y y_2.

Consideraremos ahora los casos especiales $r_2 = r_1$ y $r_1 - r_2 = N$, un entero positivo. Sea

$$\phi(r, x) = x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^{r+n}\right], \qquad x > 0, \tag{9}$$

donde, para toda r tal que $F(r+n) \neq 0$, $a_n(r)$ está dado por la Ec. (6) para $n \geq 1$. La función ϕ juega un papel similar al de x^r para la ecuación de Euler. En verdad, se concluye de la Ec. (4) que si substituimos $y = \phi(r, x)$ en la Ec. (1) obtenemos $a_0 F(r) x^r$. Ya que $F(r_1) = 0$, es claro que una solución de la Ec. (1) es $y_1(x) = \phi(r_1, x)$. Para el caso $r_2 = r_1$, debemos esperar por analogía con la ecuación de Euler, que la segunda solución contenga un término logarítmico y pueda obtenerse calculando

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \phi(r, x)}{\partial r}\right|_{r=r_1} &= \left.\frac{\partial}{\partial r}\left\{x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) x^n\right]\right\}\right|_{r=r_1} \\ &= x^{r_1}(\ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right] + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1) x^n \\ &= y_1(x) \ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1) x^n, \qquad x > 0,\end{aligned} \tag{10}$$

donde $a'_n(r_1)$ denota da_n/dr evaluada en $r = r_1$. Esto se puede verificar formalmente mostrando que $\partial[a_0 x^r F(r)]/\partial r = 0$ en $r = r_1$.

Si $r_1 - r_2 = N$, donde N es un entero positivo, entonces $F(r_2 + N) = F(r_1) = 0$, y no seremos capaces de determinar a_N de la Ec. (6) a menos que suceda que la suma en la Ec. (6) se anula también para $n = N$. Si la suma se anula, entonces a_N es arbitraria y hay una segunda solución de la forma (2) con $r = r_2$. Si la suma no se anula, entonces la segunda solución involucra un término logarítmico. Los argumentos necesarios para deducir la forma de la segunda solución en este caso, son más bien complicados y no serán dados aquí. La forma de la solución está dada en el Teorema que aparece en seguida, y el procedimiento se ilustra en la discusión de las ecuaciones Bessel de orden un medio y orden uno en la sección siguiente.

La siguiente cuestión a considerar es la convergencia de las series infinitas en las soluciones formales. Como podría esperarse, esto está relacionado a los radios de convergencia de las series de potencias para $xp(x)$ y $x^2q(x)$. Sumarizaremos los resultados de nuestra discusión y las condiciones adicionales acerca de la convergencia de las series infinitas que aparecen en las soluciones, en el Teorema siguiente.

Teorema 4.3. Considérese la ecuación diferencial (1),

$$L[y] = x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0,$$

donde $x = 0$ es un punto regular singular. Entonces las funciones $xp(x)$ y $x^2q(x)$ son analíticas en $x = 0$ con representaciones en serie de potencias

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

que convergen para $|x| < \rho$, $\rho > 0$. Sean r_1 y r_2, donde $r_1 \geq r_2$ si son reales, las raíces de la ecuación indicial

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0.$$

Entonces en cada uno de los intervalos $-\rho < x < 0$ ó $0 < x < \rho$, la Ec. (1) *tiene dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 de la forma siguiente,*

1. *Si $r_1 - r_2$ no es un entero, entonces*

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right], \tag{11a}$$

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n\right]. \tag{11b}$$

2. *Si $r_1 = r_2$, entonces*

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right], \tag{12a}$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n. \tag{12b}$$

3. *Si $r_1 - r_2 = N$, es un entero positivo, entonces*

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right], \tag{13a}$$

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2) x^n\right]. \tag{13b}$$

Los coeficientes $a_n(r_1)$, $a_n(r_2)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ y la constante a (que puede volverse cero) pueden determinarse substituyendo la forma de la solución en series para y en la Ec. (1). *Cada una de las series en las Ecs.* (11), (12), *y* (13) *converge para $|x| < \rho$ y define una función que es analítica en $x = 0$.*

Aunque probar este Teorema está más allá del alcance de este libro, podemos hacer varias observaciones. Para determinar los exponentes r_1 y r_2, que juegan tan importante papel en la presente teoría, necesitamos solamente determinar p_0 y q_0 y resolver entonces la ecuación indicial $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$. Estos coeficientes están dados por

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x), \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2q(x). \tag{14}$$

En particular, si $x = 0$ es un punto regular singular de la ecuación

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{15}$$

donde las funciones P, Q y R son polinomios, entonces $xp(x) = xQ(x)/P(x)$ y $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$. De aquí que

$$p_0 = \lim_{x \to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}. \tag{16}$$

Además, el radio de convergencia ρ para las series en las Ecs. (11), (12), y (13) es al menos igual a la distancia del origen al cero más cercano de P.

Finalmente, una alternativa al procedimiento de substitución directa para la determinación de $b_n(r_1)$ es calcular $a_n(r)$ de la Ec. (6) con $a_0 = 1$ y entonces calcular $b_n(r_1) = a'_n(r_1)$. Puede también mostrarse que a y $c_n(r_2)$ están dados por las fórmulas $a = \lim_{r \to r_2} (r - r_2) a_N(r)$ y $c_n(r_2) = [(r - r_2) a_n(r)]' |_{r = r_2}$. Estos procedimientos y el de substitución directa están ilustrados en la sección siguiente.

Ejemplo. Discutir la naturaleza de las soluciones de la ecuación

$$2x(1 + x)y'' + (3 + x)y' - xy = 0$$

en la vecindad del origen.

Esta ecuación es de la forma (15) con $P(x) = 2x(1 + x)$, $Q(x) = 3 + x$ y $R(x) = -x$. El punto $x = 0$ es un punto regular singular, ya que

$$\lim_{x \to 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 0} x \frac{3 + x}{2x(1 + x)} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{-x}{2x(1 + x)} = 0.$$

Además de las Ecs. (16), $p_0 = 3/2$ y $q_0 = 0$. Por lo tanto la ecuación indicial es $r(r - 1) + \frac{3}{2}r = 0$, y las raíces son $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{1}{2}$. Ya que estas raíces no son iguales y no difieren por un entero, habrá soluciones linealmente independientes de la forma

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \qquad \text{y} \qquad y_2(x) = |x|^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-\tfrac{1}{2})x^n\right],$$

para $-\rho < x < 0$ ó $0 < x < \rho$. Una cota inferior para el radio de convergencia de la serie es 1, la distancia de $x = 0$ a $x = -1$, el otro cero de $P(x)$. Nótese que la solución y_1 es acotada cuando $x \to 0$, realmente, ahí es analítica. Por otra parte, la segunda solución y_2 no está acotada cuando $x \to 0$.

PROBLEMAS

1. Encontrar todos los puntos regulares singulares de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Determinar la ecuación indicial y los exponentes de la singularidad en cada punto regular singular.

a) $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$ *b*) $x^2y'' - x(2 + x)y' + (2 + x^2)y = 0$

c) $x(x - 1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$ *d*) $y'' + 4xy' + 6y = 0$

e) $x^2y'' + 3(\operatorname{sen} x)y' - 2y = 0$ *f*) $2x(x + 2)y'' + y' - xy = 0$

g) $x^2y'' + \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x)y' + y = 0$ *h*) $(x + 1)^2y'' + 3(x^2 - 1)y' + 3y = 0$

2. Mostrar que

$$x^2y'' + (\operatorname{sen} x)y' - (\cos x)y = 0$$

tiene un punto regular singular en $x = 0$, y que las raíces de la ecuación indicial son ± 1. Determinar los primeros tres términos diferentes de cero en la serie correspondiente a la raíz más grande.

3. Mostrar que

$$(\ln x)y'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0$$

tiene un punto regular singular en $x = 1$. Determinar las raíces de la ecuación indicial en $x = 1$. Determinar los tres primeros términos diferentes de cero en las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - 1)^{r+n}$ correspondientes a la raíz mayor. Tómese $x - 1 > 0$. ¿Cómo se puede esperar que sea el radio de convergencia de la serie?

4. En algunos problemas de física matemática (por ejemplo la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno), es necesario estudiar la ecuación diferencial

$$x(1 - x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{i}$$

donde α, β y γ son constantes. Esta ecuación es conocida como la ecuación *hipergeométrica.*

a) Mostrar que $x = 0$ es un punto regular singular, y que las raíces de la ecuación indicial son 0 y $1 - \gamma$.

b) Mostrar que $x = 1$ es un punto regular singular, y que las raíces de la ecuación indicial son 0 y $\gamma - \alpha - \beta$.

c) Suponiendo que $1 - \gamma$ no es un entero positivo, mostrar que en la vecindad de $x = 0$ una solución de (i) es

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1)2!}x^2 + \cdots.$$

¿Cómo se espera que sea el radio de convergencia de esta serie?

d) Suponiendo que $1 - \gamma$ no es un entero o cero, mostrar que una segunda solución para $0 < x < 1$ es

$$y_2(x) = x^{(1-\gamma)}\left[1 + \frac{(\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1)}{(2 - \gamma)1!}x + \frac{(\alpha - \gamma + 1)(\alpha - \gamma + 2)(\beta - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 2)}{(2 - \gamma)(3 - \gamma)2!}x^2 + \cdots\right].$$

**e*) Mostrar que el punto al infinito es un punto regular singular, y que las raíces de la ecuación indicial son α y β. Ver el problema 10 de la sección 4.3.

5. Considérese la ecuación diferencial

$$x^3y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

donde $\alpha \neq 0$ y β son constantes reales.

a) Mostrar que $x = 0$ es un punto singular irregular.

b) Mostrar que si intentamos determinar una solución de la forma $x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, la ecuación indicial para r será lineal, y como una consecuencia habrá solamente una solución formal de esta forma.

6. Considérese la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s}y' + \frac{\beta}{x^t}y = 0, \qquad \text{(i)}$$

donde $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ son números reales, y s y t son enteros positivos que por el momento son arbitrarios.

a) Mostrar que si $s > 1$ o $t > 2$ el punto $x = 0$ es un punto singular irregular.

b) Supóngase que tratamos de encontrar una solución de la Ec. (i) de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0. \qquad \text{(ii)}$$

Mostrar que si $s = 2$ y $t = 2$ hay sólo un valor posible de r para el cual hay una solución formal de la Ec. (i) de la forma (ii).

c) Mostrar que si $s = 1$ y $t = 3$ no hay soluciones de la Ec. (i) de la forma (ii).

d) Mostrar que los valores máximos de s y t para los cuales es cuadrática la ecuación indicial en r (y por lo tanto podemos esperar encontrar dos soluciones de la forma (ii)) son $s = 1$ y $t = 2$. Estas son precisamente las condiciones que distinguen una "singularidad débil", o un punto regular singular de un punto singular irregular, como los definimos en la sección 4.3.

Como una nota de precaución apuntaremos que mientras que algunas veces es posible obtener una solución formal en serie de la forma (ii) en un punto singular irregular, la serie puede no convergir.

*4.6 ECUACION DE BESSEL

En esta sección consideraremos tres casos especiales de la ecuación de Bessel,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad (1)$$

donde ν es una constante, lo que ilustra la teoría discutida en la sección 4.5.1. Claramente $x = 0$ es un punto regular singular. Por simplicidad consideraremos solamente el caso $x > 0$.

Ecuación de Bessel de Orden Cero. Este ejemplo ilustra la situación en la que las raíces de la ecuación indicial son iguales. Poniendo $\nu = 0$ en la Ec. (1) se obtiene

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \qquad (2)$$

Substituyendo

$$y = \phi(r, x) = a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad (3)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(n+r)(n+r-1) + (n+r)]x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= a_0[r(r-1) + r]x^r + a_1[(r+1)r + (r+1)]x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\{a_n[(n+r)(n+r-1) + (n+r)] + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Las raíces de la ecuación indicial $F(r) = r(r-1) + r = 0$ son $r_1 = 0$ y $r_2 = 0$; de aquí que tengamos los casos de raíces iguales. La relación de recurrencia es

$$a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)(n+r-1) + (n+r)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}, \qquad n \geq 2. \qquad (5)$$

Para determinar $y_1(x)$ ponemos $r = 0$. Entonces de la Ec. (4) se concluye que $a_1 = 0$. Por lo tanto de la Ec. (5) $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots = 0$. Además

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \qquad n = 2, 4, 6, 8, \ldots,$$

o haciendo $n = 2m$

$$\begin{aligned} a_{2m}(0) &= -\frac{a_{2m-2}(0)}{(2m)^2} \\ &= +\frac{a_{2m-4}(0)}{(2m)^2(2m-2)^2} = \frac{(-1)a_{2m-6}(0)}{(2m)^2(2m-2)^2(2m-4)^2} \\ &\ \ \vdots \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{(2m)^2(2m-2)^2(2m-4)^2\cdots 2^2} \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned} \qquad (6)$$

De aquí que

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \qquad x > 0. \qquad (7)$$

La función entre paréntesis se conoce como la *función de Bessel de primera clase y orden cero*, y se denota por $J_0(x)$. Se concluye del Teorema 4.3 que la serie converge para toda x, y que J_0 es analítica en $x = 0$. Algunas de las propiedades más importantes de J_0 se discuten en los problemas.

En este ejemplo determinaremos $y_2(x)$ calculando $a'_n(0)$. Un procedimiento alternativo, en el que simplemente se substituye la forma (12b) de la sección 4.5.1 en la Ec. (2), y se determina entonces la b_n, se discute en el problema 7. Notaremos primero de la Ec. (4), que ya que $(r+1)^2a_1(r) = 0$ se concluye que no solamente $a_1(0) = 0$ sino que también $a'_1(0) = 0$. Es fácil deducir de la relación de recurrencia (5) que $a'_3(0) = a'_5(0) = \cdots = a'_{2n+1}(0) = \cdots = 0$; por lo tanto necesitamos calcular solamente $a'_{2m}(0)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. De la Ec. (5)

$$a_{2m}(r) = -\frac{a_{2m-2}(r)}{(2m+r)^2} = +\frac{a_{2m-4}(r)}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{(-1)^m a_0}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2(2m-4+r)^2\cdots(2+r)^2},$$
$$m = 1, 2, 3, \ldots. \quad (8)$$

El cálculo de $a'_{2m}(r)$ puede llevarse a cabo más convenientemente notando que si

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n}$$

entonces

$$f'(x) = \beta_1(x-\alpha_1)^{\beta_1-1}[(x-\alpha_2)^{\beta_2}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n}]$$
$$+ \beta_2(x-\alpha_2)^{\beta_2-1}[(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n}] + \cdots;$$

y por lo tanto para x diferente de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{x-\alpha_n}.$$

De aquí, de la Ec. (8)

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left(\frac{1}{2m+r} + \frac{1}{2m-2+r} + \cdots + \frac{1}{2+r}\right),$$

y poniendo $r = 0$ obtenemos

$$a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m-1)} + \frac{1}{2(m-2)} + \cdots + \frac{1}{2}\right]a_{2m}(0).$$

Substituyendo en $a_{2m}(0)$ de la Ec. (6), y haciendo

$$H_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1, \quad (9)$$

obtenemos finalmente

$$a'_{2m}(0) = -H_m\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \quad (10)$$

La segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero se obtiene poniendo $a_0 = 1$, y substituyendo $y_1(x)$ y $a'_{2m}(0) = b_{2m}(0)$ en la Ec. (12b) de la sección 4.5.1. Obtenemos

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}, \qquad x > 0. \quad (11)$$

En lugar de y_2, generalmente se toma la segunda solución de tal manera que sea una cierta combinación lineal de J_0 y y_2. Esta segunda solución es

conocida como la función de Bessel de segunda clase de orden cero, y es denotada por Y_0. De acuerdo con Copson [capítulo 12], definimos*

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)]. \quad (12)$$

Aquí γ es una constante, conocida como la constante de Euler-Máscheroni (1750-1800); definida por la ecuación

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \cong 0.5772. \quad (13)$$

Substituyendo $y_2(x)$ en la Ec. (12) obtenemos

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right], \qquad x > 0. \quad (14)$$

La solución general de la ecuación de Bessel de orden cero para $x > 0$ es

$$y = c_1J_0(x) + c_2Y_0(x).$$

Hay que hacer notar que como $J_0(x) \to 1$ cuando $x \to 0$, $Y_0(x)$ tiene una singularidad logarítmica en $x = 0$; esto es, $Y_0(x)$ se comporta como $(2/\pi)\ln x$ cuando $x \to 0$ para valores positivos. De aquí que si estamos interesados en las soluciones de la ecuación de Bessel de orden cero las cuales sean finitas en el origen, que a menudo es el caso, debemos descartar a Y_0. Las gráficas de las funciones J_0 y Y_0 son mostradas en la figura 4.2.

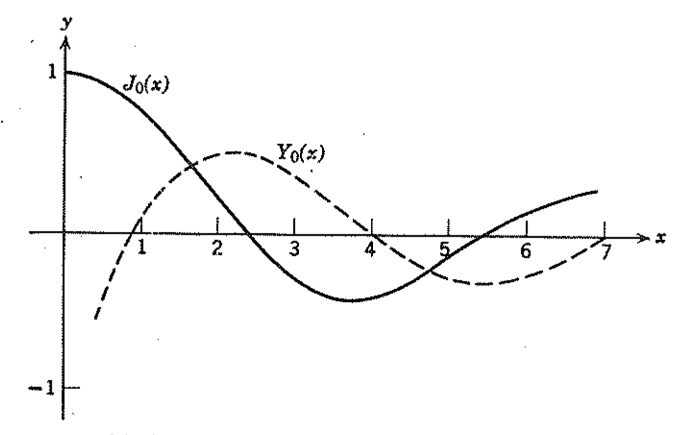


FIGURA 4.2 Función de Bessel de orden cero.

Ecuación de Bessel de Orden Un Medio. Este ejemplo ilustra la situación en la cual las raíces de la ecuación indicial difieren por un entero positivo, pero no hay un término logarítmico en la segunda solución. Tomando $\nu = \frac{1}{2}$ en la Ec. (1) tenemos

* Otros autores usan diferentes definiciones para Y_0. La forma definida aquí se conoce como la función de Weber (1842-1913).

$$L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0. \qquad (15)$$

Si substituimos la serie (3) para $y = \phi(r, x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} [(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \tfrac{1}{4}]a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= (r^2 - \tfrac{1}{4})a_0 x^r + [(r+1)^2 - \tfrac{1}{4}]a_1 x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}]a_n + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \qquad (16) \end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = -\frac{1}{2}$; por lo tanto las raíces difieren por un entero. La relación de recurrencia es

$$[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}]a_n = -a_{n-2}, \qquad n \geq 2. \qquad (17)$$

Correspondiendo a la mayor raíz $r_1 = \frac{1}{2}$ encontramos de la Ec. (16) que $a_1 = 0$, y por lo tanto de la Ec. (17) que $a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots = 0$. Además, para $r = \frac{1}{2}$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

o tomando a $n = 2m$

$$\begin{aligned} a_{2m} &= -\frac{a_{2m-2}}{(2m+1)2m} = \frac{a_{2m-4}}{(2m+1)(2m)(2m-1)(2m-2)} \\ &\;\;\vdots \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (18) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{1/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right] \\ &= x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \qquad x > 0. \qquad (19) \end{aligned}$$

La serie infinita en la Ec. (19) es precisamente la serie de Taylor para sen x, de aquí que una solución de la ecuación de Bessel de orden un medio es $x^{-1/2}$ sen x. La función de Bessel de primera clase de orden un medio, $J_{1/2}$, está definida como $(2/\pi)^{1/2} y_1$. Por lo tanto

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x, \qquad x > 0. \qquad (20)$$

Correspondiendo a la raíz $r_2 = -\frac{1}{2}$ es posible que encontremos dificultad al calcular a_1 debido a que $N = r_1 - r_2 = 1$. Sin embargo, es claro de la Ec. (16) que para $r = -\frac{1}{2}$ los coeficientes a_0 y a_1 son cero, y por lo tanto a_0 y a_1 pueden escogerse arbitrariamente. Entonces correspondiendo a a_0 obtenemos a $a_2, a_4, \ldots$ de la relación de recurrencia (17); y usando a a_1 obtenemos a $a_3, a_5, a_7, \ldots$. Por lo tanto la segunda solución no involucrará un término logarítmico. Se deja como un ejercicio para el estudiante mostrar de la Ec. (17) que para $r = -\frac{1}{2}$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

y

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{-1/2}\left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\ &= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^{1/2}}, \qquad x > 0. \qquad (21) \end{aligned}$$

La constante a_1 simplemente introduce un múltiplo de $y_1(x)$. La segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden un medio, usualmente se toma como la solución generada por a_0 con $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$. Esto es denotado por $J_{-1/2}$. Entonces

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \qquad x > 0. \qquad (22)$$

La solución general de la Ec. (15) es $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$.

Ecuación de Bessel de Orden Uno. Este ejemplo ilustra la situación en la cual las raíces de la ecuación indicial difieren por un entero positivo y la segunda involucra un término logarítmico. Tomando $\nu = 1$ en la Ec. (1) obtenemos

$$L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0. \qquad (23)$$

Si substituimos $y = \phi(r, x)$ la serie (3), y unimos términos como en el ejemplo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= a_0(r^2 - 1)x^r + a_1[(r+1)^2 - 1]x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(r+n)^2 - 1]a_n + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \qquad (24) \end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$. La relación de recurrencia es

$$[(r+n)^2 - 1]a_n(r) = -a_{n-2}(r), \qquad n \geq 2. \qquad (25)$$

Correspondiendo a la raíz mayor $r = 1$, la relación de recurrencia es

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)n}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots.$$

De la Ec. (24) podemos encontrar que $a_1 = 0$, y por lo tanto de la relación de recurrencia $a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Para valores pares de n, sea $n = 2m$; entonces

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m} = +\frac{a_{2m-4}}{2^4(m+1)m \cdot m(m-1)}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!\,m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{26}$$

Con $a_0 = 1$ tenemos

$$y_1(x) = x\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}. \tag{27}$$

La función de Bessel de primera clase de orden uno se toma usualmente como $\frac{1}{2}y_1$ y es denotada por J_1:

$$J_1(x) = \tfrac{1}{2}y_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}. \tag{28}$$

La serie converge absolutamente para toda x; por lo tanto la función J_1 está definida para toda x.

Al determinar la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden uno, ilustraremos el método de substitución directa. De acuerdo con el Teorema 4.3 supondremos que

$$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \qquad x > 0. \tag{29}$$

Calculando $y'_2(x)$, $y''_2(x)$, substituyéndolas en la Ec. (23) y haciendo uso del hecho de que J_1 es una solución de la Ec. (23), obtenemos

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}[(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \tag{30}$$

donde $c_0 = 1$. Substituyendo para $J_1(x)$ de la Ec. (28), corriendo los índices de la suma en las dos series, y realizando varios pasos de álgebra se tiene

$$-c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n^2-1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n$$
$$= -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}\right]. \tag{31}$$

De la Ec. (31) observamos primero que $c_1 = 0$, y $a = -c_0 = -1$. En seguida, ya que hay solamente potencias impares de x en el miembro derecho, el coeficiente de cada potencia par de x en el miembro izquierdo debe ser cero. De aquí que, ya que $c_1 = 0$, tenemos $c_3 = c_5 = \cdots = 0$. Correspondiendo a las potencias impares de x obtenemos la relación de recurrencia (sea $n = 2m + 1$)

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!\,m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{32}$$

Cuando ponemos $m = 1$ en la Ec. (32) obtenemos

$$(3^2 - 1)c_4 + c_2 = (-1)3/(2^2 \cdot 2!).$$

Nótese que c_2 puede seleccionarse *arbitrariamente*, y entonces esta ecuación determina c_4. Nótese también que en la ecuación para el coeficiente de x, c_2 aparece multiplicada por 0, y que la ecuación se usó para determinar a. Que c_2 sea arbitraria no es sorprendente, ya que c_2 es el coeficiente de x en la expresión $x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$. Consecuentemente, c_2 simplemente genera un múltiplo de J_1, y y_2 se determina únicamente hasta un término aditivo de J_1. De acuerdo con la práctica usual escogemos $c_2 = 1/2^2$. Obtenemos entonces

$$c_4 = \frac{-1}{2^4 \cdot 2}[\tfrac{3}{2} + 1] = \frac{-1}{2^4 2!}[(1 + \tfrac{1}{2}) + 1]$$
$$= \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!}(H_2 + H_1).$$

Aunque no es una tarea fácil mostrarlo, la solución de la relación de recurrencia (32) es

$$c_{2m} = \frac{(-1)(-1)^m(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!\,(m-1)!}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

con el sobreentendido de que $H_0 = 1$. De aquí que

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!\,(m-1)!}x^{2m}\right], \qquad x > 0. \tag{33}$$

El cálculo de $y_2(x)$ usando el procedimiento alternativo en el que determinamos $a = \lim_{r \to r_2}(r - r_2)a_N(r)$ y $c_n(r_2) = [(r - r_2)a_n(r)]'|_{r=r_2}$ también es bastante complicado. Sin embargo, el último procedimiento conduce a la fórmula general para la c_{2m} sin la necesidad de resolver una relación de recurrencia de la forma (32). En esta inteligencia el lector puede comparar los cálculos de la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero en el texto y en el problema 7.

La segunda solución de la Ec. (23), la función de Bessel de segunda clase y orden uno, Y_1, se toma generalmente como una cierta combinación lineal de J_1 y y_2. De acuerdo con Copson [capítulo 12], Y_1 se define como

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)], \tag{34}$$

donde γ, la constante de Euler/Máscheroni, se definió en la Ec. (13). La solución general de la Ec. (23) para $x > 0$ es

$$y = c_1J_1(x) + c_2Y_1(x).$$

Nótese que mientras que J_1 es analítica en $x = 0$, la segunda solución Y_1 permanece no acotada de la misma manera como $1/x$ cuando $x \to 0$.

PROBLEMAS

1. Mostrar que cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales tiene un punto regular singular en $x = 0$, y determinar dos soluciones linealmente independientes para $x > 0$.

a) $x^2y'' + 2xy' + xy = 0$ *b*) $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$

c) $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$ *d*) $x^2y'' + 4xy' + (2 + x)y = 0$

2. Encontrar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden $3/2$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{9}{4})y = 0,$$

para $x > 0$.

3. Mostrar que la ecuación de Bessel de orden un medio,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0, \qquad x > 0,$$

puede reducirse a la ecuación

$$v'' + v = 0$$

por el cambio de variable dependiente $y = x^{-1/2}v(x)$. Concluir a partir de este hecho que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ y $y_2(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ son soluciones de la ecuación de Bessel de orden un medio.

4. Mostrar directamente que la serie para $J_0(x)$, Ec. (7), converge absolutamente para toda x.

5. Mostrar directamente que la serie para $J_1(x)$, Ec. (28), converge absolutamente para toda x y que $J'_0(x) = -J_1(x)$.

6. Considérese la ecuación de Bessel de orden ν

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad x > 0.$$

Tómese ν real y mayor que cero.

a) Mostrar que $x = 0$ es un punto regular singular, y que las raíces de la ecuación indicial son ν y $-\nu$.

b) Correspondiendo a la raíz mayor ν, mostrar que una solución es

$$y_1(x) = x^{\nu}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(m+\nu)(m+\nu-1)\cdots(2+\nu)(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

c) Si 2ν no es un entero mostrar que una segunda solución es

$$y_2(x) = x^{-\nu}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(m-\nu)(m-\nu-1)\cdots(2-\nu)(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

Nótese que $y_1(x)$ es analítica en $x = 0$, y que $y_2(x)$ es no acotado cuando $x \to 0$.

d) Verificar por métodos directos que las series de potencias en las expresiones para $y_1(x)$ y $y_2(x)$ convergen absolutamente para toda x. Verificar también que y_2 es una solución siempre y cuando ν no sea entero.

7. Mostramos en esta sección que una solución de la ecuación de Bessel de orden cero,

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

es J_0, donde $J_0(x)$ está dada por la Ec. (7) con $a_0 = 1$. De acuerdo con el Teorema 4.3 tendremos una segunda solución de la forma $(x > 0)$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_nx^n.$$

a) Mostrar que

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} nb_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_nx^{n+2} + 2xJ_0'(x). \qquad \text{(i)}$$

b) Substituyendo la representación en serie de $J_0(x)$ en la Ec. (i), mostrar que

$$b_1x + 2^2b_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n^2b_n + b_{n-2})x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2n\,x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \qquad \text{(ii)}$$

c) Nótese que en el miembro derecho de la Ec. (ii) aparecen solamente potencias pares de x. Mostrar que $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$, $b_2 = 1/2^2(1!)^2$, y que

$$(2n)^2b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n(2n)/2^{2n}(n!)^2, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Deducir que

$$b_4 = \frac{-1}{2^24^2}(1 + \tfrac{1}{2}) \qquad \text{y} \qquad b_6 = \frac{1}{2^24^26^2}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}).$$

La solución general de la relación de recurrencia es $b_{2n} = (-1)^{n+1}H_n/2^{2n}(n!)^2$, y substituyendo en la expresión para $y_2(x)$ obtenemos la solución dada en la Ec. (11).

8. Por medio de un adecuado cambio de variables es siempre posible transformar una ecuación diferencial con coeficientes variables en una ecuación de Bessel de cierto orden. Por ejemplo, mostrar que una solución de

$$x^2y'' + (\alpha^2\beta^2x^{2\beta} + \tfrac{1}{4} - \nu^2\beta^2)y = 0, \qquad x > 0$$

está dada por $y = x^{1/2}f(\alpha x^{\beta})$ donde $f(\xi)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden ν.

9. Usando el resultado del problema 8 mostrar que la solución general de la ecuación de Airy

$$y'' - xy = 0, \qquad x > 0$$

es $y = x^{1/2}[c_1f_1(\tfrac{2}{3}x^{3/2}) + c_2f_2(\tfrac{2}{3}x^{3/2})]$ donde $f_1(\xi)$ y $f_2(\xi)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden un tercio.

REFERENCIAS

Coddington, E.A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Copson, E.T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford University, Oxford, 1935.

Las pruebas de los Teoremas 4.3 y 4.1 pueden encontrarse en libros avanzados o intermedios; por ejemplo, ver los capítulos 3 y 4 del libro de Coddington, o los capítulos 3 y 4 del

Rainville, E.D., *Intermediate Differential Equations*, 2.ª ed., Macmillan, Nueva York, 1964.

Ver también estos textos para una discusión del punto al infinito, que fue mencionado en el problema 10 de la sección 4.3. El comportamiento de las soluciones cerca de un punto singular irregular es un tópico más avanzado aún; puede encontrarse una breve discusión de este tema en el capítulo 5 de

Coddington, E.A., y Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1955.

Discusiones más completas de la ecuación de Bessel, la ecuación de Legendre, y muchas de las otras ecuaciones que se han mencionado en este texto, pueden encontrarse en libros avanzados de ecuaciones diferenciales, o bien libros de métodos de matemáticas aplicadas o de funciones especiales.

Un texto de esta clase que trata de funciones especiales tales como los polinomios de Legendre, las funciones Bessel, etc., es

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics*, Holt, Rinehart & Winston, Nueva York, 1961.

Capítulo 5

Ecuaciones lineales de orden superior

5.1 INTRODUCCION

En este capítulo extenderemos la teoría de ecuaciones lineales de segundo orden desarrollada en el capítulo 3 a ecuaciones lineales de más alto orden. Una ecuación diferencial lineal de enésimo orden es una ecuación de la forma

$$P_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = G(x). \qquad (1)$$

Supondremos, a menos de que otra cosa se establezca, que las funciones $P_0, \ldots, P_n$, y G son funciones de variable real, continuas sobre algún intervalo $\alpha < x < \beta$, y que P_0 no es cero en ninguna parte del intervalo. Dividiendo entonces la Ec. (1) entre $P_0(x)$ obtenemos

$$L[y] = \frac{d^ny}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = g(x), \qquad (2)$$

donde, usando la misma notación que en el capítulo 3, hemos introducido el operador lineal diferencial L. La teoría matemática asociada con la Ec. (2) es completamente análoga a la requerida para la ecuación lineal de segundo orden; por esta razón, en gran parte, simplemente estableceremos los resultados para la ecuación lineal de enésimo orden. Las pruebas de la mayoría de los resultados son también similares a aquellas deducidas para la ecuación lineal de segundo orden, y generalmente se dejarán como ejercicios.

Notaremos primero que ya que la Ec. (2) involucra la enésima derivada de y con respecto a x, se puede decir, que requeriremos n integraciones para resolver la Ec. (2). Cada una de esas integraciones introducirá una constante arbitraria. Entonces podemos esperar que para obtener una solución única es necesario especificar n condiciones iniciales, digamos

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (3)$$

donde x_0 puede ser cualquier punto en el intervalo $\alpha<x<\beta$ y y_0, $y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ es cualquier conjunto de constantes reales prescritas. Que tal solución existe y que es única está asegurado por el siguiente Teorema de existencia y unicidad.

Teorema 5.1. Si las funciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y g son continuas sobre el intervalo abierto $\alpha<x<\beta$, existe entonces una función y sólo una función $y=\phi(x)$ que satisface la Ec. (2) *sobre el intervalo $\alpha<x<\beta$ y las condiciones iniciales prescritas* (3).

La prueba de este Teorema no será dada aquí; sin embargo, notemos que si las funciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son constantes, construiremos realmente la solución de la Ec. (2) que satisface las condiciones iniciales (3) (ver secciones 5.3 y 5.5). Aun cuando conozcamos una solución en este caso, no podemos saber que es única sin el uso del Teorema 5.1. Una prueba del Teorema completo puede encontrarse en el Ince [sección 3.32] o en el Coddington [capítulo 6].

Como en el problema correspondiente de segundo orden, discutiremos primero el problema de resolver la ecuación homogénea o complementaria.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{4}$$

La teoría general de la ecuación homogénea (4) está discutida en la sección 5.2, y un método para resolver la Ec. (4) cuando las p_j son constantes está dado en la sección 5.3. En seguida consideraremos el problema de encontrar una solución particular y_p de la ecuación nohomogénea (2). Se discuten en las secciones 5.4 y 5.5, respectivamente, el método de coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros para determinar la solución particular de la Ec. (2).

PROBLEMAS

1. Suponiendo que las funciones $p_1, \ldots, p_n$ son continuas sobre un intervalo que incluye al origen, y que $y=\phi(x)$ es una solución del problema de valores iniciales

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0, \qquad y(0)=y_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)},$$

determínese $\phi^{(n)}(0)$. Mostrar que si $p_1, \ldots, p_n$ son derivables en $x=0$, entonces $\phi^{(n+1)}(0)$ puede determinarse en términos de los datos iniciales.

2. Podemos esperar por analogía con las ecuaciones de primero y segundo orden que bajo condiciones adecuadas sobre la f, la ecuación diferencial de enésimo orden $y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ tenga una solución que involucre n constantes arbitrarias. Inversamente, una familia de funciones que involucra n constantes arbitrarias puede mostrarse que es la solución de una ecuación diferencial de enésimo orden. Eliminando las constantes $c_1, \ldots, c_n$ determínese la ecuación diferencial satisfecha por cada una de las funciones siguientes

a) $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \operatorname{sen} x$

b) $y = c_1 + c_2\cos x + c_3 \operatorname{sen} x$

c) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$

d) $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

e) $y = x + c_1 + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x$

f) $y = c_1 + c_2x + c_3\operatorname{senh} x + c_4\cosh x$

3. Determínense los intervalos en los que es seguro que existen soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

a) $y^{\text{iv}} + 4y''' + 3y = x$

b) $xy''' + (\operatorname{sen} x)y'' + 3y = \cos x$

c) $x(x-1)y^{\text{iv}} + e^xy'' + 4x^2y = 0$

d) $y''' + xy'' + x^2y' + x^3y = \ln x$

5.2 TEORIA GENERAL DE LAS ECUACIONES LINEALES DE ENESIMO ORDEN

Si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de enésimo orden

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0, \tag{1}$$

se concluye por cálculo directo que la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x), \tag{2}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias, es también una solución de la Ec. (1). Es natural preguntar en si cualquier solución de la Ec. (1) puede expresarse como una combinación lineal de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Esto podrá hacerse si, sin importar que se hayan especificado las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

es posible elegir las constantes $c_1, \ldots, c_n$ de tal forma que la combinación lineal (2) satisfaga las condiciones iniciales. Específicamente, para cualquier elección del punto x_0 en $\alpha<x<\beta$, y para cualquier elección de y_0, y'_0, $y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, debemos ser capaces de determinar $c_1, \ldots, c_n$ tal que las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) &+ \cdots + c_ny_n(x_0) &&= y_0 \\ c_1y_1'(x_0) &+ \cdots + c_ny_n'(x_0) &&= y_0' \\ &\ \ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) &+ \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) &&= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{4}$$

se satisfagan. Las ecuaciones (4) pueden resolverse siempre para las constantes $c_1, \ldots, c_n$, siempre y cuando que el determinante de los coeficientes no se anule. Por otra parte, si este determinante se anula, es siempre posible escoger valores de y_0, y'_0, $y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ tales que las Ecs. (4) no tengan una solución. Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para la existencia

de una solución de las Ecs. (4) para valores arbitrarios de y_0, y'_0, $y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ es que el Wronskiano

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{5}$$

no se anule en $x = x_0$. Ya que x_0 puede ser cualquier punto en el intervalo $\alpha < x < \beta$ es necesario y suficiente que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ no se anule en cualquier punto del intervalo. Justamente como para la ecuación lineal de segundo orden, puede mostrarse que si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la Ec. (1), entonces $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es o idénticamente cero sobre el intervalo $\alpha < x < \beta$ o no se anula nunca (ver problema 2). Por lo tanto tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 5.2. Si las funciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son continuas sobre el intervalo abierto $\alpha < x < \beta$, si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la Ec. (1), y si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ al menos en un punto en $\alpha < x < \beta$, entonces cualquier solución de la Ec. (1) puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Tal conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la Ec. (1) lo llamaremos un *conjunto fundamental de soluciones* de la Ec. (1). Que existe un conjunto fundamental de soluciones, puede mostrarse precisamente en la misma forma que como se hizo para la ecuación lineal de segundo orden. Ver Teorema 3.7. Ya que todas las soluciones de la Ec. (1) son de la forma (2), se acostumbra usar el término *solución general* para referirse a una combinación lineal arbitraria de cualquier conjunto fundamental de soluciones de la Ec. (1).

La discusión de la independencia lineal ofrecida en la sección 3.3 puede generalizarse también. Las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se dice que son *linealmente independientes* sobre $\alpha < x < \beta$ si no hay un conjunto de constantes c_1, $c_2, \ldots, c_n$ (excepto $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$) tales que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \tag{6}$$

para toda x en $\alpha < x < \beta$. Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de la Ec. (1), puede mostrarse que una condición necesaria y suficiente para que ellas sean linealmente independientes es que $W(y_1, \ldots, y_n)$ no se anule sobre $\alpha < x < \beta$. Ver el problema 3. Por lo tanto las funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones de la Ec. (1) son linealmente independientes, y un conjunto linealmente independiente de n soluciones de la Ec. (1) forma un conjunto fundamental de soluciones de la Ec. (1).

Problema nohomogéneo. Considérese ahora la ecuación nohomogénea

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = g(x). \tag{7}$$

Si y_{p_1} y y_{p_2} son dos soluciones particulares cualesquiera de la Ec. (7), se concluye inmediatamente de la linealidad del operador L, que $L[y_{p_1} - y_{p_2}] = g - g = 0$, y por lo tanto la diferencia de cualquier par de soluciones de la ecuación nohomogénea (7) es una solución de la ecuación homogénea (1). Ya que cualquier solución de la ecuación homogénea puede expresarse como una combinación lineal de un conjunto fundamental de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, se concluye que cualquier solución de la Ec. (7) puede escribirse como

$$\begin{aligned} y &= y_c(x) + y_p(x) \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x), \end{aligned} \tag{8}$$

donde y_p es cualquier solución de la ecuación nohomogénea (7). La combinación lineal (8) se conoce generalmente como la *solución general* de la ecuación nohomogénea (7).

El problema principal es determinar un conjunto fundamental de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Si los coeficientes en las ecuaciones diferenciales son constantes éste es un problema bastante simple; está discutido en la sección siguiente. Si los coeficientes no son constantes, generalmente es necesario utilizar métodos numéricos (capítulo 7) o métodos de series similares a aquellos usados para las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes variables.*

En conclusión, puede mostrarse que el método de reducción de orden se aplica también a las ecuaciones diferenciales lineales de enésimo orden. Por lo tanto, si y_1 es una solución de la Ec. (1), la substitución $y = y_1(x)v(x)$ conduce a una ecuación diferencial lineal de orden $n-1$ para v'. Ver problemas 7 y 8. Correspondiendo a y_1 y a las $n-1$ soluciones linealmente independientes $v_1, \ldots, v_{n-1}$ de la ecuación reducida, obtenemos el conjunto fundamental de soluciones $y_1, y_1v_1, \ldots, y_1v_{n-1}$ de la Ec. (1). Si se conoce una solución de la ecuación para v', puede usarse otra vez el método de reducción de orden para obtener una ecuación diferencial lineal de orden $n-2$ y así sucesivamente hasta que se obtenga una ecuación de primer orden. Sin embargo, en la práctica no se utiliza el método de reducción de orden más que para ecuaciones de segundo orden. Si $n \geq 3$ la ecuación reducida es al menos de segundo orden, y muy raramente esta ecuación será más fácil de resolver que la ecuación original. Por otra parte, como hemos visto en la sección 3.4, si $n = 2$ la ecuación reducida es de primer orden y por lo tanto se puede lograr una considerable simplificación usando el citado método de reducción de orden.

PROBLEMAS

1. Verificar que el operador diferencial L definido por $L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y$ es un operador diferencial lineal. Esto es, mostrar que

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2],$$

* Una discusión del método de series para ecuaciones de orden más alto puede encontrarse en Ince [capítulo 16] o Coddington y Levinson [capítulo 4].

donde y_1 y y_2 son funciones n veces derivables y c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Por lo tanto, mostrar que si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de $L[y]=0$, entonces la combinación lineal $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ es también una solución de $L[y]=0$.

2. En la sección 3.2 se mostró que el Wronskiano $W(y_1, y_2)$ de dos soluciones de $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ puede escribirse como $W(y_1, y_2)(x) = c \exp\left[-\int^x p_1(t)\,dt\right]$, donde c es una constante. Puede mostrarse más generalmente que si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$ para $\alpha < x < \beta$, entonces

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = c \exp\left[-\int^x p_1(t)\,dt\right].$$

Esto es conocido como la identidad de Abel. Para mostrar este resultado para $n=3$ podemos proceder como sigue

a) Mostrar que

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix},$$

donde $W(y_1, y_2, y_3) = W$.
Sugerencia: La derivada de un determinante de 3 por 3 es la suma de 3 determinantes de tres por tres con sus primero, segundo y tercer renglón derivados, respectivamente.

b) Substituir para y_1''', y_2''' y y_3''' de la ecuación diferencial; multiplicar el primer renglón por p_3, el segundo por p_2 y sumar éstos al último renglón para obtener

$$W' = -p_1W.$$

El resultado deseado se concluye de esta ecuación. La prueba para el caso general es similar. Ya que la función exponencial nunca se anula, este resultado muestra que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ o es idénticamente cero, o no es cero en ningún lugar sobre $\alpha < x < \beta$.

3. El propósito de este problema es mostrar que si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ no es idénticamente cero sobre $\alpha < x < \beta$, entonces $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes; y si son linealmente independientes y son soluciones de

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0, \qquad \alpha < x < \beta, \tag{i}$$

entonces $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ no es cero en ninguna parte sobre $\alpha < x < \beta$.

a) Supóngase que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ no es idénticamente cero sobre $\alpha < x < \beta$. Para mostrar que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes mostraremos que es imposible encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (no todas cero) tales que

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0, \tag{ii}$$

para toda x en $\alpha < x < \beta$. Escribiendo las ecuaciones para las primera, segunda, ..., y $(n-1)$ésima derivadas de la Ec. (ii) en un punto en el que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, mostrar que las c's deben ser todas cero si la Ec. (ii) es cierta. De aquí que $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ sean linealmente independientes.

b) Supóngase que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la Ec. (i). Para mostrar que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ no es cero en ninguna parte sobre $\alpha < x < \beta$, suponga que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) = 0$ y muestre que esto conduce a una contradicción.
Sugerencia: Si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) = 0$, existe una solución diferente de cero de la Ec. (i) que satisface las condiciones iniciales $y = y' = y'' = \cdots = y^{(n-1)} = 0$ en x_0; usar entonces el Teorema de existencia y unicidad.

4. Verificar que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial y calcular el Wronskiano de las soluciones

a) $y''' + y' = 0;\quad 1,\quad \cos x,\quad \operatorname{sen} x$
b) $y^{\text{iv}} + y'' = 0;\quad 1,\quad x,\quad \cos x,\quad \operatorname{sen} x$
c) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0;\quad e^x,\quad e^{-x},\quad e^{-2x}$
d) $y^{\text{iv}} + 2y''' + y'' = 0;\quad 1,\quad x,\quad e^{-x},\quad xe^{-x}$
e) $xy''' - y'' = 0;\quad 1,\quad x,\quad x^3$

5. Mostrar que $W(5, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x) = 0$. ¿Puede establecerse este resultado sin calcular directamente el Wronskiano?

6. Supóngase que el operador diferencial lineal L está definido por

$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_ny,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes reales. Calcúlese: *a*) $L[x^n]$; *b*) $L[e^{rx}]$.

c) Determínense cuatro soluciones de la ecuación $y^{\text{iv}} - 5y'' + 4y = 0$. ¿Piensa usted que las cuatro soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones? ¿Por qué?

7. Mostrar que si y_1 es una solución de

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0,$$

entonces la substitución $y = y_1(x)v(x)$ conduce a la siguiente ecuación lineal de segundo orden para v':

$$y_1v''' + (3y_1' + p_1y_1)v'' + (3y_1'' + 2p_1y_1' + p_2y_1)v' = 0.$$

8. Usando el método de reducción de orden, resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0,\quad x > 0;\quad y_1(x) = x$
b) $x^2(x+3)y''' - 3x(x+2)y'' + 6(1+x)y' - 6y = 0,\quad x > 0;$
$y_1(x) = x^2,\quad y_2(x) = x^3$

5.3 LA ECUACION HOMOGENEA CON COEFICIENTES CONSTANTES

Considérese la ecuación diferencial homogénea lineal de enésimo orden

$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{1}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes reales. Es natural anticipar, a partir de nuestro conocimiento de las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, que para valores adecuados de r, $y = e^{rx}$ será una solución de la Ec. (1). Realmente,

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= e^{rx}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) \\ &= e^{rx} Z(r) \end{aligned} \tag{2}$$

para toda r. Para aquellos valores de r para los cuales $Z(r) = 0$, se concluye que $L[e^{rx}] = 0$ y $y = e^{rx}$ es una solución de la Ec. (1). El polinomio $Z(r)$ se conoce como el *polinomio auxiliar* o *polinomio característico* y la ecuación $Z(r) = 0$ como la *ecuación auxiliar* o *ecuación característica* de la ecuación diferencial (1). Un polinomio de grado n tiene n ceros, digamos $r_1, r_2, \ldots, r_n$; de aquí que podamos escribir el polinomio auxiliar en la forma

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n). \tag{3}$$

Raíces Reales y Desiguales. Si las raíces de la ecuación auxiliar son reales y son todas diferentes, entonces tenemos n soluciones distintas $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$ de la Ec. (1). Para mostrar en este caso que la solución general de la Ec. (1) es de la forma

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}, \tag{4}$$

debemos mostrar que las funciones $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$ son linealmente independientes sobre el intervalo $-\infty < x < \infty$. Vamos a suponer que hay dependencia lineal y mostraremos que esto conduce a una contradicción. Existen entonces constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas cero, tales que $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} = 0$ para toda x en $-\infty < x < \infty$. Multiplicando por $e^{-r_1 x}$ nos da $c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)x} + \cdots + c_n e^{(r_n - r_1)x} = 0$ para $-\infty < x < \infty$ y, derivando, obtenemos

$$(r_2 - r_1)c_2 e^{(r_2 - r_1)x} + (r_3 - r_1)c_3 e^{(r_3 - r_1)x} + \cdots + (r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_1)x} = 0$$

para $-\infty < x < \infty$. Multiplicando este último resultado por $e^{-(r_2 - r_1)x}$ y derivando entonces se obtiene

$$(r_3 - r_2)(r_3 - r_1)c_3 e^{(r_3 - r_2)x} + \cdots + (r_n - r_2)(r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_2)x} = 0$$

para $-\infty < x < \infty$. Continuando de esta manera se llega finalmente a

$$(r_n - r_{n-1})(r_n - r_{n-2}) \cdots (r_n - r_2)(r_n - r_1)c_n e^{(r_n - r_{n-1})x} = 0 \tag{5}$$

para $-\infty < x < \infty$. Ya que la función exponencial no se anula y las r_i son desiguales, tenemos $c_n = 0$. Por lo tanto $c_1 e^{r_1 x} + \cdots + c_{n-1} e^{r_{n-1} x} = 0$ y, procediendo como antes, obtenemos $c_{n-1} = 0$. Similarmente $c_{n-2}, \ldots, c_1 = 0$, y ésta es una contradicción de la suposición de que $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}$ son linealmente dependientes.

Raíces Complejas. Si la ecuación auxiliar tiene raíces complejas, éstas deberán ocurrir en pares conjugados, $\lambda \pm i\mu$, ya que los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ son números reales. Siempre y cuando ninguna de las raíces esté repetida, la solución general de la Ec. (1) será aún de la forma (4).* Sin embargo, siguiendo el mismo procedimiento que para la ecuación de segundo orden (sección 3.5.1), en lugar de las soluciones de valores complejos $e^{(\lambda + i\mu)x}$ y $e^{(\lambda - i\mu)x}$ usaremos normalmente las soluciones de valores reales

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \qquad e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \tag{6}$$

obtenidas como las partes reales e imaginarias de $e^{(\lambda + i\mu)x}$. Por lo tanto, aun cuando algunas de las raíces de la ecuación auxiliar sean complejas, aún es posible expresar la solución general de la Ec. (1) como una combinación lineal de soluciones de valores reales.

Ejemplo 1. Encontrar la solución general de

$$y^{\text{iv}} - y = 0. \tag{7}$$

Substituyendo e^{rx} por y, encontramos que la ecuación auxiliar es

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Las raíces son $r = 1, -1, i, -i$; por lo tanto la solución general de la Ec. (7) es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x.$$

Raíces Repetidas. Si las raíces de la ecuación auxiliar no son distintas, esto es, si algunas raíces son repetidas, entonces claramente la solución (4) no es la solución general de la Ec. (1). Recordando que si r_1 era una raíz repetida de la ecuación lineal de segundo orden $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, entonces las dos soluciones linealmente independientes eran $e^{r_1 x}$ y $x e^{r_1 x}$, parece razonable esperar que si una raíz de $Z(r) = 0$, digamos $r = r_1$, se repite s veces ($s \le n$), entonces

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{s-1} e^{r_1 x} \tag{8}$$

son soluciones de la Ec. (1). Para probar esto, observemos que si r_1 es un cero repetido s veces de $Z(r)$, entonces la Ec. (2) puede escribirse como

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= e^{rx} a_0 (r - r_1)^s (r - r_{s+1}) \cdots (r - r_n) \\ &= e^{rx} (r - r_1)^s H(r) \end{aligned} \tag{9}$$

* La independencia lineal de las soluciones $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}$ en el caso de que algunas de las r sean números complejos, se sigue de una generalización del argumento dado para el caso de las r reales.

para todos los valores de r, donde $H(r_1) \neq 0$. Notando que $\partial e^{rx}/\partial r = xe^{rx}$, y observando que podemos cambiar la derivación con respecto a x y a r, encontramos, derivando la Ec. (9) con respecto a r, que

$$L[xe^{rx}] = e^{rx}[x(r - r_1)^s H(r) + s(r - r_1)^{s-1} H(r) + (r - r_1)^s H'(r)]. \quad (10)$$

Ya que $s \geq 2$ el miembro derecho de la Ec. (10) se anula para $r = r_1$ y por lo tanto $xe^{r_1 x}$ es también una solución de la Ec. (1). Si $s \geq 3$ derivando la Ec. (10) otra vez con respecto a r y poniendo $r = r_1$, se muestra que $x^2 e^{r_1 x}$ es también una solución de la Ec. (1). Este proceso puede continuar a través de $s - 1$ derivaciones, lo cual da el resultado deseado. Nótese que la derivada número s del miembro derecho de la Ec. (9) no se anula para $r = r_1$ ya que la derivada s-ésima de $(r - r_1)^s$ es una constante y $H(r_1) \neq 0$. Es razonable esperar que $e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \ldots, x^{s-1} e^{r_1 x}$ sean linealmente independientes, y nosotros aceptaremos este hecho sin prueba.

Finalmente, si la raíz compleja $\lambda + i\mu$ se repite s veces, el conjugado complejo $\lambda - i\mu$ se repite también s veces. Correspondiendo a estas $2s$ soluciones de valores complejos, podemos encontrar $2s$ soluciones de valores reales, notando que las partes reales e imaginarias de $e^{(\lambda + i\mu)x}$, $xe^{(\lambda + i\mu)x}, \ldots, x^{s-1} e^{(\lambda + i\mu)x}$ son también soluciones linealmente independientes:

$$e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x, \quad xe^{\lambda x} \cos \mu x, \quad xe^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x,$$
$$\ldots, x^{s-1} e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad x^{s-1} e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x.$$

Por lo tanto, la solución general de la Ec. (1) puede expresarse siempre como una combinación lineal de n soluciones de valores reales. Considérese el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2. Encuéntrese la solución general de

$$y^{\text{iv}} + 2y'' + y = 0. \quad (11)$$

La ecuación auxiliar es

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Las raíces son $r = i, i, -i, -i$, y la solución general de la Ec. (11) es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x.$$

A menudo es necesario, cuando se determinan las raíces de la ecuación auxiliar, calcular las raíces cúbicas, o cuartas, o aun de raíces superiores de un número (posiblemente complejo). Esto puede hacerse generalmente de manera más conveniente usando la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, y las leyes algebraicas dadas en la sección 3.5.1. Esto está ilustrado en el ejemplo siguiente, y discutido también en los problemas 1 y 2.

Ejemplo 3. Encuéntrese la solución general de

$$y^{\text{iv}} + y = 0. \quad (12)$$

La ecuación auxiliar es

$$r^4 + 1 = 0.$$

En este caso el polinomio no es fácilmente factorizable. Debemos calcular las cuatro raíces de -1. Ahora

$$-1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = e^{i\pi}$$
$$= \cos(\pi + 2m\pi) + i \operatorname{sen}(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi + 2m\pi)},$$

donde m es cero o cualquier entero negativo o positivo. De aquí que

$$(-1)^{1/4} = e^{i(\pi/4 + m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

Las cuatro raíces cuartas de -1 se obtienen poniendo $m = 0$, 1, 2 y 3; ellas son

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Es fácil verificar que para cualquier otro valor de m obtenemos una de estas cuatro raíces. Por ejemplo, correspondiendo a $m = 4$ obtenemos $(1 + i)/\sqrt{2}$. La solución general de la Ec. (12) es

$$y = e^{x/\sqrt{2}}\left(c_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-x/\sqrt{2}}\left(c_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

En conclusión mencionamos que el problema de determinar las raíces de $Z(r) = 0$ para $n > 2$ puede requerir el uso de métodos numéricos, si estas raíces no se pueden encontrar por inspección o por un proceso simple de ensayo y error. Aunque hay fórmulas similares a las fórmulas cuadráticas para las raíces de las ecuaciones polinomiales cúbica y cuártica, no hay una fórmula* para $n > 4$; y aun para ecuaciones polinomiales de tercero y cuarto grado generalmente es más eficiente usar métodos numéricos más bien que la fórmula exacta, cuando se desean determinar las raíces.

Si las constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ en la Ec. (1) son números complejos, la solución de la Ec. (1) aún es de la forma (4). En este caso, sin embargo, las raíces de la ecuación auxiliar serán, en general, números complejos; y no valdrá más el hecho de que el complejo conjugado de una raíz es también una raíz. Las soluciones correspondientes serán de valores complejos.

* La fórmula para resolver la ecuación cúbica se atribuye generalmente a Cardano (1501-1576) y para la ecuación cuarta a su alumno Ferrari (1522-1565). Es impcsible expresar las raíces de una ecuación general algebraica de grado mayor que cuatro por una fórmula que involucre solamente operaciones racionales (suma, multiplicación, etc.) y extracciones de raíz. Esto fue establecido por Abel y Galois (1811-1832). Una discusión de los métodos para resolver ecuaciones algebraicas puede encontrarse en Uspensky.

PROBLEMAS

1. Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma

$$R(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = Re^{i\theta}.$$

Nótese que $e^{i(\theta+2m\pi)} = e^{i\theta}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$a)$ $1 + i$ $\quad$ $b)$ $-1 + i\sqrt{3}$ $\quad$ $c)$ -1

$d)$ $-i$ $\quad$ $e)$ $\sqrt{3} - i$ $\quad$ $f)$ $-1 - i$

2. Observando que $e^{i(\theta+2m\pi)} = e^{i\theta}$ con m entero, y que (una forma de la fórmula de DeMoivre, problema 12, sección 3.5.1)

$$[e^{i(\theta+2m\pi)}]^{1/n} = e^{i[(\theta+2m\pi)/n]} = \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right),$$

determínense las raíces indicadas de cada uno de los siguientes números complejos.

$a)$ $1^{1/3}$ $\quad$ $b)$ $(1 - i)^{1/2}$

$c)$ $1^{1/4}$ $\quad$ $d)$ $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^{1/2}$

En cada uno de los problemas 3 a 13 determínese la solución general de la ecuación diferencial dada.

3. $y''' - y'' - y' + y = 0$
4. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
5. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$
6. $y^{\text{iv}} - 4y''' + 4y'' = 0$
7. $y^{\text{vi}} + y = 0$
8. $y^{\text{iv}} - 5y'' + 4y = 0$
9. $y^{\text{vi}} - 3y^{\text{iv}} + 3y'' - y = 0$
10. $y^{\text{vi}} - y'' = 0$
11. $y^{\text{v}} - 3y^{\text{iv}} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$
12. $y^{\text{iv}} - 8y' = 0$
13. $y^{\text{viii}} + 8y^{\text{iv}} + 16y = 0$

14. Resolver el problema de valores iniciales

$$y''' + y' = 0; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = 2.$$

15. Mostrar que la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{\text{iv}} - y = 0$$

puede escribirse como

$$y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x + c_3\cosh x + c_4\,\text{senh}\,x.$$

Determínese la solución que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$. ¿Por qué es conveniente usar $\cosh x$ y $\text{senh}\,x$ en lugar de e^x y e^{-x}?

Los problemas 16 a 19 tienen que ver con la ecuación de Euler de enésimo orden.

*16. La ecuación de Euler de orden n o ecuación equidimensional es

$$L[y] = x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \qquad \text{(i)}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales. Considérese solamente el intervalo $x > 0$.

$a)$ Mostrar que

$$L[x^r] = x^r F(r)$$

donde

$$F(r) = r(r-1)\cdots(r-n+1) + a_1[r(r-1)\cdots(r-n+2)] + \cdots + a_{n-1}r + a_n$$

es un polinomio de grado n en r. Las funciones $x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n}$ correspondientes a las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de $F(r) = 0$, son soluciones de la Ec. (i).

$b)$ Mostrar que si r_1 es una raíz repetida s veces de $F(r) = 0$ entonces x^{r_1}, $x^{r_1}\ln x$, $x^{r_1}(\ln x)^2, \ldots, x^{r_1}(\ln x)^{s-1}$ son soluciones de la Ec. (i).

Cuando las raíces de $F(r) = 0$ son complejas, se pueden obtener soluciones de valores reales en la forma descrita para la ecuación de Euler de segundo orden. Ver la sección 4.4.

*17. Usando los resultados del problema 16 determinar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Considérese solamente el intervalo $x > 0$.

$a)$ $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

$b)$ $x^3y''' + xy' - y = 0$

$c)$ $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0$

*18. Al determinar el arrastre sobre una esfera muy pequeña de radio a puesta en un flujo viscoso uniforme, es necesario resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\rho^3 f''''(\rho) + 8\rho^2 f'''(\rho) + 8\rho f''(\rho) - 8f'(\rho) = 0, \qquad \rho > a,$$

donde ρ es la distancia medida desde el centro de la esfera. Nótese que ésta es una ecuación de Euler para f', y muéstrese, usando los resultados del problema 16, que la solución general es

$$f(\rho) = \frac{A}{\rho^3} + \frac{B}{\rho} + C + D\rho^2$$

donde A, B, C y D son constantes. Muéstrese también que la solución que satisface las condiciones a la frontera $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$ y $f(\rho) \to U$ (la velocidad en el infinito) cuando $\rho \to \infty$ es $f(\rho) = Ua^3/2\rho^3 - 3Ua/2\rho + U$. La fórmula para el arrastre (fórmula de Stokes) sobre la esfera viene a ser $6\pi\mu aU$ donde μ es la viscosidad del fluido. Este resultado fue usado por R.A. Millikan (1868-1953) en su famoso experimento para medir la carga del electrón.

*19. Mostrar, para $x > 0$, que el cambio de variable $x = e^z$ reduce la ecuación de Euler de tercer orden $x^3y''' + a_1x^2y'' + a_2xy' + a_3y = 0$ a una ecuación lineal de tercer orden con coeficientes constantes. Esta transformación reduce también la ecuación de Euler de enésimo orden a una ecuación lineal de enésimo orden con coeficientes constantes. Resolver el problema 17b por este método.

*20. A veces es de importancia en aplicaciones a la ingeniería conocer si todas las posibles soluciones de una ecuación homogénea lineal tienden a cero cuando x tiende al infinito. Si tal cosa sucede, se dice que la ecuación es *asintóticamente estable.* Si x representa el tiempo y y la respuesta de un

sistema físico, la condición de que la ecuación diferencial sea asintóticamente estable significa que, sin importar cuáles sean las condiciones iniciales, la respuesta del sistema a dichas condiciones iniciales decaerá eventualmente a cero cuando x se hace grande. Para la ecuación de segundo orden $ay'' + by' + cy = 0$, se mostró en la sección 3.7.1 (ver también la sección 3.5.1, problema 10) que la condición suficiente para la estabilidad asintótica es que a, b y c sean positivas. Más generalmente la ecuación

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0, \qquad \text{(i)}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son reales, será asintóticamente estable si todas las raíces de la ecuación correspondiente tienen partes reales negativas. Una condición necesaria y suficiente para determinar si la Ec. (i) es asintóticamente estable, sin resolver la ecuación, ha sido dada por Hurwitz (1859-1919). Para $n = 4$ el criterio de estabilidad de Hurwitz puede enunciarse como sigue: La Ec. (i) es asintóticamente estable si y sólo si para $a_0 > 0$,

$$a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

son todos positivos. Para $n = 3$ la condición se aplica justamente a las tres primeras expresiones con $a_4 = 0$, y para $n = 2$ las primeras dos expresiones con $a_3 = 0$. Una discusión completa del criterio de estabilidad de Hurwitz puede encontrarse en Guillemin [capítulo 6, artículo 26].

Determine si cada una de las siguientes ecuaciones es asintóticamente estable y verifique su resultado, si esto es posible, calculando realmente la solución general.

a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ *b*) $y''' - y = 0$

c) $y''' + y'' - y' + y = 0$ *d*) $y^{\text{iv}} + 2y'' + y = 0$

e) $y''' + 0.1y'' + 1.2y' - 0.4y = 0$ *f*) $y''' + 3.2y'' + 2.41y' + 0.21y = 0$

5.4 EL METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Una solución particular de la ecuación lineal nohomogénea de enésimo orden con coeficientes constantes

$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = g(x) \qquad (1)$$

puede obtenerse por el método de coeficientes indeterminados siempre y cuando $g(x)$ sea de una forma apropiada. Mientras que el método de coeficientes indeterminados no es tan general como el de variación de parámetros que está descrito en la sección siguiente, generalmente es mucho más fácil de usar cuando es aplicable.

Justamente como para la ecuación lineal de segundo orden, es claro que cuando se aplica el operador diferencial lineal de coeficientes constantes L a un polinomio $A_0x^m + A_1x^{m-1}, \ldots, A_m$, a una función exponencial $e^{\alpha x}$, a

una función senoidal sen βx, o una función cosenoidal cos βx, el resultado es un polinomio, una función exponencial, o una combinación lineal de funciones seno y coseno, respectivamente. Por lo tanto, si $g(x)$ es una suma de polinomios, exponenciales, senos y cosenos, o aun productos de tales funciones, podemos esperar que sea posible encontrar $y_p(x)$ eligiendo una combinación adecuada de polinomios, exponenciales, etc., con un número de constantes indeterminadas. Las constantes se determinan entonces de tal forma que se satisfaga la Ec. (1).

Considérese primero el caso de que $g(x)$ sea un polinomio de grado m

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m, \qquad (2)$$

donde $b_0, b_1, \ldots, b_m$ son constantes dadas. Es natural buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m. \qquad (3)$$

Substituyendo y en la Ec. (1), e igualando los coeficientes de potencias iguales de x, encontramos de los términos en x^m que $a_nA_0 = b_0$. Si $a_n \neq 0$ tenemos $A_0 = b_0/a_n$. Las constantes $A_1, \ldots, A_m$ están determinadas de los coeficientes de los términos $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x^0$.

Si $a_n = 0$, esto es, si una constante es una solución de la ecuación homogénea, no podemos resolver para A_0; en este caso es necesario suponer para $y_p(x)$ un polinomio de grado $m + 1$ para obtener un término en $L[y_p](x)$ y balancearlo entonces contra b_0x^m. Sin embargo, no es necesario poner la constante en la forma supuesta para $y_p(x)$. Más generalmente es fácil verificar que si cero es una raíz que se repite s veces (una raíz del polinomio auxiliar), en cuyo caso $1, x, x^2, \ldots, x^{s-1}$ son soluciones de la ecuación homogénea, entonces una forma adecuada para $y_p(x)$ es

$$y_p(x) = x^s(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m). \qquad (4)$$

Como un segundo problema supóngase que $g(x)$ es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m). \qquad (5)$$

Entonces deberíamos esperar que $y_p(x)$ fuera de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m). \qquad (6)$$

si $e^{\alpha x}$ no fuera una solución de la ecuación homogénea. Si α es una raíz s veces repetida de la ecuación auxiliar, una forma adecuada para $y_p(x)$ es

$$y_p(x) = x^se^{\alpha x}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m). \qquad (7)$$

Estos resultados pueden probarse, como para la ecuación nohomogénea lineal de segundo orden, reduciendo este problema al anterior por la substitución de $y = e^{\alpha x}u(x)$. La función u satisfará una ecuación nohomogénea lineal de enésimo orden con coeficientes constantes, el término nohomogéneo será precisamente el polinomio (2). Ver problema 18.

Similarmente, si $g(x)$ es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m)\begin{cases}\operatorname{sen}\beta x,\\ \cos\beta x,\end{cases} \tag{8}$$

entonces una forma adecuada para $y_p(x)$, siempre y cuando que $\alpha + i\beta$ no sea una raíz de la ecuación auxiliar, es

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m)\cos\beta x + e^{\alpha x}(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m)\operatorname{sen}\beta x. \tag{9}$$

Si $\alpha + i\beta$ es una raíz repetida s veces de la ecuación auxiliar, es necesario multiplicar el miembro derecho de la Ec. (9) por x^s.

Estos resultados están resumidos en la tabla 5.1.

TABLA 5.1

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$	$x^s(A_0 x^m + \cdots + A_m)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_0 x^m + \cdots + A_m)e^{\alpha x}$
$P_m(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\operatorname{sen}\beta x\\ \cos\beta x\end{cases}$	$x^s[(A_0 x^m + \cdots + A_m)e^{\alpha x}\cos\beta x + (B_0 x^m + \cdots + B_m)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x]$

Aquí s es el entero no negativo más pequeño para el cual cada término en $y_p(x)$ difiere de cada término en la función complementaria $y_c(x)$.

Si $g(x)$ es una suma de términos de la forma (2), (5) y (8), generalmente es más fácil en la práctica calcular separadamente la solución particular correspondiente a cada término en $g(x)$. Usando entonces el principio de superposición (ya que la ecuación diferencial es lineal), la solución particular del problema completo es la suma de las soluciones particulares de los problemas individuales. Esto está ilustrado en el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Encontrar una solución particular de

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}. \tag{10}$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea. La ecuación auxiliar es $r^3 - 4r = 0$, y las raíces son $0, \pm 2$; de aquí que

$$y_c(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}.$$

Usando el principio de superposición se ve que una solución particular será la suma de soluciones particulares correspondientes a las ecuaciones diferenciales

$$y''' - 4y' = x, \qquad y''' - 4y' = 3\cos x, \qquad y''' - 4y' = e^{-2x}.$$

Nuestra conjetura inicial para una solución particular, y_{p_1}, de la primera ecuación es $A_0 x + A_1$; pero ya que una constante es una solución de la ecuación homogénea multiplicamos por x. De aquí que

$$y_{p_1}(x) = x(A_0 x + A_1).$$

Para la segunda solución suponemos

$$y_{p_2}(x) = B\cos x + C\operatorname{sen} x,$$

y no hay necesidad de modificar esta conjetura inicial ya que $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ no son soluciones de la ecuación homogénea. Finalmente para la tercera ecuación, ya que e^{-2x} es una solución de la ecuación homogénea, suponemos que

$$y_{p_3}(x) = Exe^{-2x}.$$

Las constantes son determinadas substituyendo en las ecuaciones diferenciales individuales; ellas son $A_0 = -\frac{1}{8}$, $A_1 = 0$, $B = 0$, $C = -\frac{3}{5}$, y $E = \frac{1}{8}$. Por lo tanto, una solución particular de la Ec. (10) es

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{3}{5}\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{8}xe^{-2x}.$$

El método de los coeficientes indeterminados puede usarse siempre que sea posible conjeturar la forma correcta de $y_p(x)$. Sin embargo, generalmente es imposible para otra clase de ecuaciones diferenciales que no sean con coeficientes constantes, y para otros términos nohomogéneos que no sean del tipo antes descrito. Para problemas más complicados, podemos usar el método de variación de parámetros, que se discute en la sección siguiente.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 11, determínese la solución general de la ecuación diferencial dada. Cuando se especifique encuéntrese la solución que satisface las condiciones iniciales dadas.

1. $y''' + 4y' = x, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$
2. $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3$
3. $y''' + y'' + y' + y = e^{-x} + 4x$
4. $y''' - y = 2\operatorname{sen} x$
5. $y^{\text{iv}} + 2y'' + y = 3x + 4, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1$
6. $y^{\text{iv}} - 4y'' = x^2 + e^x$
7. $y^{\text{iv}} + 2y'' + y = 3 + \cos 2x$
8. $y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x$
9. $y^{\text{vi}} + y''' = x$
10. $y^{\text{iv}} + y''' = \operatorname{sen} 2x$
11. $y^{\text{iv}} - y = 3x + \cos x$

En cada uno de los problemas del 12 al 17, determínese la forma adecuada para $y_p(x)$ si se va a usar el método de coeficientes indeterminados. No se evalúen las constantes.

12. $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^x$
13. $y''' - y' = xe^{-x} + 2\cos x$
14. $y^{iv} - 2y'' + y = e^x + \operatorname{sen} x$
15. $y^{iv} - y''' - y'' + y' = x^2 + 4 + x \operatorname{sen} x$
16. $y^{iv} + 4y'' = \operatorname{sen} 2x + xe^x + 4$
17. $y^{iv} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x}\operatorname{sen} x$
18. Considérese la ecuación diferencial nohomogénea de enésimo orden

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = g(x)$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son constantes. Verifíquese que si $g(x)$ es de la forma

$$e^{\alpha x}(b_0x^m + \cdots + b_m),$$

entonces la substitución $y = e^{\alpha x}u(x)$ reduce la ecuación anterior a la forma

$$t_0u^{(n)} + t_1u^{(n-1)} + \cdots + t_nu = b_0x^m + \cdots + b_m,$$

donde $t_0, \ldots, t_n$ son constantes. Determínense t_0 y t_n en términos de las a's y la α. Por lo tanto, el problema de determinar una solución particular de la ecuación original se reduce al problema más simple de determinar una solución particular de una ecuación con coeficientes constantes y un polinomio para el término nohomogéneo.

5.5 El METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

El método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación diferencial lineal nohomogénea de enésimo orden

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x) \tag{1}$$

es una extensión directa de la teoría para las ecuaciones diferenciales de segundo orden (ver la sección 3.6.2). Como antes, para usar el método de variación de parámetros, es necesario primero resolver la correspondiente ecuación diferencial homogénea. En general esto puede ser difícil a menos de que los coeficientes sean constantes. Sin embargo, el método de variación de parámetros es aún más general que el método de coeficientes indeterminados en el sentido siguiente. El método de coeficientes indeterminados es aplicable generalmente sólo para ecuaciones con coeficientes constantes, y una clase limitada de funciones g; para ecuaciones con coeficientes constantes, la ecuación homogénea puede resolverse y por lo tanto puede determinarse una solución particular para cualquier función continua g por el método de variación de parámetros. Supóngase que conocemos un conjunto fundamental de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación homogénea. Entonces

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x). \tag{2}$$

El método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la Ec. (1) descansa en la posibilidad de determinar n funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tales que $y_p(x)$ es de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x). \tag{3}$$

Ya que tenemos n funciones que determinar, tendremos que especificar n condiciones. Una de éstas es claramente que y_p satisfaga la Ec. (1). Las otras $n-1$ condiciones se eligen de tal forma de facilitar los cálculos. Ya que difícilmente podemos esperar una simplificación al determinar y_p si debemos resolver ecuaciones de alto orden para las u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, es natural imponer condiciones que supriman los términos que conducen a las altas derivadas de las u_i. De la Ec. (3) obtenemos

$$y_p' = (u_1y_1' + u_2y_2' + \cdots + u_ny_n') + (u_1'y_1 + u_2'y_2 + \cdots + u_n'y_n). \tag{4}$$

Por lo tanto, la primera condición que imponemos sobre las u_i es que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 + \cdots + u_n'y_n = 0. \tag{5}$$

Continuando este proceso en una forma similar a través de las $n-1$ derivadas de y_p se obtiene

$$y_p^{(m)} = u_1y_1^{(m)} + u_2y_2^{(m)} + \cdots + u_ny_n^{(m)}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \tag{6}$$

y las siguientes $n-1$ condiciones sobre las funciones $u_1, \ldots, u_n$:

$$u_1'y_1^{(m-1)} + u_2'y_2^{(m-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(m-1)} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7}$$

La enésima derivada de y_p es

$$y_p^{(n)} = (u_1y_1^{(n)} + \cdots + u_ny_n^{(n)}) + (u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)}). \tag{8}$$

La condición de que y_p sea una solución de la Ec. (1) da, al substituir las derivadas de y_p de las Ecs. (6) y (8), colectando términos, y notando que $L[y_i] = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)} = g. \tag{9}$$

La ecuación (9), acoplada con las $n-1$ ecuaciones (7), representan n ecuaciones simultáneas nohomogéneas lineales para $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$.

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' + \cdots + y_nu_n' &= 0, \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' + \cdots + y_n'u_n' &= 0, \\ y_1''u_1' + y_2''u_2' + \cdots + y_n''u_n' &= 0, \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)}u_1' + \cdots + y_n^{(n-1)}u_n' &= g. \end{aligned} \tag{10}$$

Una condición suficiente para la existencia de una solución del sistema de ecuaciones (10) es que el determinante de los coeficientes no se anula. Sin embargo, el determinante de los coeficientes es precisamente $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, y no puede anularse ya que $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. Por lo tanto es posible determinar $u'_1, \ldots, u'_n$. Usando la regla de Cramer, la solución del sistema de ecuaciones (10) es

$$u'_m(x) = \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

donde $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x)$ y W_m es el determinante, obtenido de $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ reemplazando la enésima columna por la columna $(0, 0, \ldots, 0, \ldots, 0, 1)$:

$$W_m = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots\cdots & y_{m-1} & 0 & y_{m+1} & \cdots\cdots & y_n \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & \cdots\cdots & y_{m-1}^{(n-1)} & 1 & y_{m+1}^{(n-1)} & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Con esta notación, una solución particular de la Ec. (1) está dada por

$$y_p(x) = \sum_{m=1}^{n} y_m(x) \int^x \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)}\, dt. \tag{13}$$

Mientras que este procedimiento es muy directo, el problema computacional de evaluar $y_p(x)$ de la Ec. (13) para n mayor que 2 no es trivial. El cálculo puede simplificarse algo usando la identidad de Abel:

$$W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = c \exp\left[-\int^x p_1(t)\, dt\right].$$

(Ver problema 2 de la sección 5.2.) La constante c puede determinarse evaluando $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en un punto convenientemente elegido.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 3 úsese el método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación diferencial dada

1. $y''' + y' = \tan x, \qquad 0 < x < \pi/2$
2. $y''' - y' = x$
3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$

4. Dado que x, x^2 y $1/x$ son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \qquad x > 0,$$

determínese una solución particular.

5. Encuéntrese una fórmula que involucre integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$y''' - y'' + y' - y = g(x).$$

6. Encuéntrese una fórmula que involucre integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$y^{\text{iv}} - y = g(x).$$

Sugerencia: Las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.

7. Encuéntrese una fórmula que involucre integrales para una solución particular de la ecuación diferencial

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = g(x), \qquad x > 0.$$

Sugerencia: Verificar que x, x^2, y x^3 son soluciones de la ecuación homogénea.

REFERENCIAS

Coddington, E.A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Coddington, E.A., and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1955.

Guillemin, E.A., *The Mathematics of Circuit Analysis*, Wiley, Nueva York, 1949.

Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green, Londres, 1927.

Uspensky, J.V., *Theory of Equations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1948.

Capítulo 6

Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

6.1 INTRODUCCION

Este capítulo está dedicado a una discusión de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas. Tales sistemas aparecen naturalmente en problemas que involucran varias variables dependientes, cada una de las cuales es una función de una sola variable independiente. Denotaremos la variable independiente por t, y supondremos que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ representan variables dependientes que son funciones de t. Denotaremos la derivación con respecto a t por una prima (').

Por ejemplo, el movimiento de una partícula en el espacio está gobernada por la ecuación de Newton en tres dimensiones

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= F_1\left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right),\\
m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= F_2\left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right),\\
m\frac{d^2x_3}{dt^2} &= F_3\left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde m es la masa de la partícula; x_1, x_2 y x_3 son sus coordenadas espaciales; y F_1, F_2 y F_3 son las fuerzas actuando sobre las partículas en las direcciones x_1, x_2 y x_3 respectivamente. Si la partícula es una idealización de un vehículo espacial, por ejemplo, F_1, F_2 y F_3 incluyen las fuerzas gravitacionales que se ejercen sobre el vehículo por los cuerpos celestes cercanos, cualquier fuerza producida por el propio sistema de propulsión del vehículo, y las fuerzas de arrastre si el vehículo está dentro de la atmósfera de la Tierra.

Como otro ejemplo, considérese el sistema masa-resorte mostrado en la figura 6.1. Las dos masas se mueven sobre una superficie sin fricción bajo la influencia de fuerzas externas $F_1(t)$ y $F_2(t)$, y están restringidas en sus movimientos por tres resortes cuyas constantes son k_1 k_2 y k_3 respectivamente. Usando argumentos similares a los de la sección 3.7, encontramos las ecuaciones siguientes para las coordenadas x_1 y x_2 de las dos masas

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t), \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\ &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t). \end{aligned} \tag{2}$$

FIGURA 6.1 Un sistema masa-resorte de dos grados de libertad.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales se encuentran también en muchas otras aplicaciones, tales como los circuitos eléctricos, la mezcla química de varios ingredientes, y el crecimiento de dos o más poblaciones que interaccionan o medran mutuamente.

Desde un punto de vista teórico hay una conexión importante entre sistemas de ecuaciones y ecuaciones aisladas de orden arbitrario. En efecto, una ecuación de enésimo orden

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3}$$

puede reducirse siempre a un sistema de n ecuaciones de primer orden que tenga una forma bastante especial. Para mostrar esto introduciremos las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definidas por

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y'',\ \ldots,\ x_n = y^{(n-1)}. \tag{4}$$

Se concluye inmediatamente que

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\ \vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \end{aligned} \tag{5}$$

y de la Ec. (3)

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{6}$$

En forma similar los sistemas (1) y (2) pueden reducirse a sistemas de ecuaciones de primer orden que contengan, respectivamente, seis y cuatro ecuaciones.

Por lo tanto es suficiente considerar sistemas de ecuaciones de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ &\ \vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{7}$$

Debido a que los sistemas de la forma (7) incluyen todos los casos de interés, se acostumbra, en un estudio avanzado de la teoría de ecuaciones diferenciales, tratar principalmente con tales sistemas.

El sistema de ecuaciones (7) se dice que tiene una *solución* sobre el intervalo $\alpha < t < \beta$ si existe un conjunto de n funciones $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ que son derivables en todos los puntos en $\alpha < t < \beta$, y el cual satisface el sistema (7) en todos los puntos en este intervalo. Además del sistema dado de ecuaciones diferenciales, puede haber también condiciones iniciales dadas de la forma

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \ldots,\ x_n(t_0) = x_n^0, \tag{8}$$

donde t_0 es un valor especificado de t en $\alpha < t < \beta$, y $x_1^0, \ldots, x_n^0$ son números prescritos. Las ecuaciones diferenciales (7) y las condiciones iniciales (8), juntas, forman un problema de valores iniciales.

Para garantizar que el problema de valores iniciales (7) y (8) tiene una solución y que ésta es única, es necesario imponer ciertas condiciones sobre las funciones $F_1, F_2, \ldots, F_n$. El Teorema siguiente es análogo a los Teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones aisladas de primero y segundo orden, Teoremas 2.2 y 3.1 respectivamente.

Teorema 6.1. Supóngase que cada una de las funciones $F_1, \ldots, F_n$ y cada una de las derivadas parciales $\partial F_1/\partial x_1, \ldots, \partial F_1/\partial x_n, \ldots, \partial F_n/\partial x_1, \ldots, \partial F_n/\partial x_n$ son continuas en una región R del $tx_1x_2 \cdots x_n$-espacio que contiene el punto $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Entonces hay un intervalo $|t - t_0| < h$ en el que existe una solución única $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales (7), *y que también satisface las condiciones iniciales* (8).

La prueba de este Teorema puede construirse generalizando el argumento de la sección 2.11, pero no la daremos aquí. Nótese, sin embargo, que en la hipótesis del Teorema no se dice nada acerca de las derivadas parciales de las funciones $F_1, F_2, \ldots, F_n$ con respecto a t. También, en la conclusión, no se especifica exactamente la longitud $2h$ del intervalo en el que existe la solución

y en algunos casos puede ser muy corta. Finalmente, el Teorema no es el más general que podemos conocer, y las condiciones dadas son suficientes, pero no necesarias para asegurar la conclusión.

Si cada una de las funciones $F_1, \ldots, F_n$ en las Ecs. (7) es una función lineal de las variables dependientes $x_1, \ldots, x_n$, se dice entonces que el sistema de ecuaciones es *lineal*. Por lo tanto, el sistema más general de n ecuaciones lineales de primer orden tiene la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Si cada una de las funciones $g_1, \ldots, g_n$ es idénticamente cero, entonces se dice que el sistema (9) es homogéneo; de cualquier otra forma es nohomogéneo. Para el sistema lineal (9), el Teorema de existencia y unicidad es un poco más simple y tiene una conclusión más fuerte. Es análogo a los Teoremas 2.1 y 3.2.

Teorema 6.2. Si las funciones $p_{11}, \ldots, p_{nn}, g_1, \ldots, g_n$ son continuas sobre un intervalo abierto $\alpha < t < \beta$, que contenga al punto $t = t_0$, entonces existe una solución única $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales (9), *que también satisface las condiciones iniciales* (8). *Esta solución es válida en todo el intervalo $\alpha < t < \beta$.*

Nótese que en contraste con la situación que prevalece en un sistema no lineal, la existencia y la unicidad de una solución de un sistema lineal está garantizado en todo el intervalo en el que se satisfacen las hipótesis. Además, para un sistema lineal los valores iniciales $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ en $t = t_0$ son completamente arbitrarios, mientras que en el caso no lineal el punto inicial deberá estar en la región R definida en el Teorema 6.1.

Excepto por parte de la sección 6.2, el resto de este capítulo está dedicado a sistemas de ecuaciones lineales de primer orden. La exposición se expresa más efectivamente en términos de ciertos resultados de la teoría de matrices, y los hechos pertinentes de esta teoría se resumen en la sección 6.3. Para los lectores que no tengan familiaridad con la teoría de matrices, la sección 6.2 contiene una discusión sobre técnicas elementales de eliminación por medio de las cuales pueden reemplazarse los sistemas de ecuaciones por una sola ecuación de alto orden. Este procedimiento no da un fundamento adecuado para una discusión general de los sistemas lineales, pero es algunas veces bastante eficiente para resolver sistemas de sólo unas cuantas ecuaciones.

PROBLEMAS

1. Reducir cada uno de los sistemas (1) y (2) a un sistema de ecuaciones de primer orden de la forma (7).

2. Considérese el problema de valores iniciales $u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t)$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u'_0$. Transfórmese este problema en un problema de valores iniciales para dos ecuaciones lineales de primer orden.

3. Muéstrese que si a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son constantes con a_{12} y a_{21} no ambas cero, y si las funciones g_1 y g_2 son diferenciables, entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), & x_1(0) &= x_1^0 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), & x_2(0) &= x_2^0 \end{aligned}$$

puede transformarse en un problema de valores iniciales para una sola ecuación de segundo orden. ¿Puede hacerse este procedimiento si $a_{11}, \ldots, a_{22}$ son funciones de t?

4. Considérese el sistema homogéneo lineal

$$\begin{aligned} x' &= p_{11}(t)x + p_{12}(t)y, \\ y' &= p_{21}(t)x + p_{22}(t)y. \end{aligned}$$

Muéstrese que si $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ y $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ son dos soluciones del sistema dado, entonces $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ es también una solución para cualesquiera constantes c_1 y c_2. Este es el principio de superposición.

5. Sean $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ y $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ dos soluciones cualesquiera del sistema nohomogéneo lineal

$$\begin{aligned} x' &= p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t), \\ y' &= p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t). \end{aligned}$$

Mostrar que $x = x_1(t) - x_2(t)$, $y = y_1(t) - y_2(t)$ es una solución del sistema homogéneo correspondiente

$$\begin{aligned} x' &= p_{11}(t)x + p_{12}(t)y, \\ y' &= p_{21}(t)x + p_{22}(t)y. \end{aligned}$$

6.2 SOLUCION DE SISTEMAS LINEALES POR ELIMINACION

La forma más elemental de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes es por el proceso directo de eliminación. Esto es, las variables dependientes se eliminan sucesivamente con el objeto de obtener eventualmente una sola ecuación de alto orden que contenga solamente una variable dependiente. Después de resolver esta ecuación, se pueden encontrar las otras variables dependientes una después de otra.

Para sistemas de solamente dos o tres ecuaciones de primer orden tales métodos son bastante eficientes, pueden aplicarse tanto a sistemas homogéneos como nohomogéneos, y pueden usarse también ventajosamente en algunos problemas que involucren sistemas de ecuaciones diferenciales de alto orden.

Los métodos de eliminación no conducen sin embargo, ellos mismos, a discusiones teóricas y no son convenientes para resolver grandes sistemas de ecuaciones.

Para ilustrar el método de eliminación vamos a considerar el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x_1' = x_1 + x_2,$$
$$x_2' = 4x_1 + x_2. \qquad (1)$$

Resolviendo la primera de las Ecs. (1) para x_2 se obtiene

$$x_2 = x_1' - x_1. \qquad (2)$$

De aquí que $x'_2 = x''_1 - x'_1$, y de la segunda de las Ecs. (1) obtenemos, después de algunas simplificaciones algebraicas menores,

$$x_1'' - 2x_1' - 3x_1 = 0. \qquad (3)$$

La solución general de la Ec. (3) es

$$x_1 = \phi_1(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}, \qquad (4)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. De la Ec. (2) se concluye inmediatamente que

$$x_2 = \phi_2(t) = 2c_1e^{3t} - 2c_2e^{-t}. \qquad (5)$$

La solución del sistema (1) dada por las Ecs. (4) y (5) contiene dos constantes arbitrarias. Es fácil mostrar que estas constantes pueden elegirse de tal forma que satisfagan cualesquiera condiciones iniciales prescritas en un punto dado. Por lo tanto, cualquier solución del sistema (1) puede escribirse en la forma (4), (5) para elecciones adecuadas de c_1 y c_2. Entonces, se dice que las Ecs. (4) y (5) forman la solución general del sistema (1). El lector puede verificar que se obtiene la misma solución si se elimina x_1 de las Ecs. (1) en lugar de x_2.

Se puede aplicar el mismo procedimiento al sistema nohomogéneo

$$x_1' = x_1 + x_2 + g_1(t),$$
$$x_2' = 4x_1 + x_2 + g_2(t). \qquad (6)$$

Las únicas diferencias son que ahora $x_2 = x'_1 - x_1 - g_1(t)$, y que la ecuación de segundo orden (3) para x_1 se reemplaza por una ecuación nohomogénea.

Como se mencionó antes, el método de eliminación puede usarse también para resolver sistemas de ecuaciones de alto orden. Tales sistemas pueden encontrarse naturalmente en varias aplicaciones; surgen también cuando el método de eliminación que acabamos de describir se aplica a un sistema de más de dos ecuaciones de primer orden.

Consideremos entonces el sistema

$$L_1[x_1] + L_2[x_2] = g_1(t),$$
$$L_3[x_1] + L_4[x_2] = g_2(t), \qquad (7)$$

donde L_1, L_2, L_3 y L_4 son operadores diferenciales lineales, no necesariamente de primer orden, con coeficientes constantes, y g_1 y g_2 son funciones dadas. Por ejemplo, supóngase que L_1 es el operador diferencial de segundo orden

$$L_1[x] = ax'' + bx' + cx. \qquad (8)$$

Es conveniente poner $D = d/dt$, y escribir la Ec. (8) en la forma

$$L_1[x] = (aD^2 + bD + c)x. \qquad (9)$$

Antes de ir más adelante es necesario discutir el significado de una expresión tal como $L_2L_1[x]$, que indica las aplicaciones sucesivas de los operadores L_1 y L_2 a la función x. Supóngase por el momento que

$$L_1[x] = (aD + b)x, \qquad (10)$$

y

$$L_2[x] = (cD + d)x, \qquad (11)$$

donde a, b, c y d son constantes. Entonces $L_2L_1[x]$ está definido por

$$\begin{aligned} L_2L_1[x] &= cD[(aD + b)x] + d[(aD + b)x] \\ &= caD^2x + cbDx + daDx + dbx \\ &= [caD^2 + (cb + da)D + db]x. \end{aligned} \qquad (12)$$

Nótese que la Ec. (12) puede escribirse como

$$L_2L_1[x] = [(cD + d)(aD + b)]x, \qquad (13)$$

donde se trata a D como una cantidad algebraica al desarrollar el miembro derecho. Similarmente

$$\begin{aligned} L_1L_2[x] &= aD[(cD + d)x] + b[(cD + d)x] \\ &= [acD^2 + (ad + bc)D + bd]x. \end{aligned} \qquad (14)$$

Es claro de las Ecs. (12) y (14) que

$$L_2L_1[x] = L_1L_2[x], \qquad (15)$$

esto es, que L_1 y L_2 son conmutativas. Es posible mostrar que la propiedad de conmutatividad la poseen no sólo los operadores L_1 y L_2 definidos por las Ecs. (10) y (11), sino que la tiene cualquier par de operadores diferenciales lineales, L_1 y L_2 con coeficientes constantes, sin importar cuál sea su orden. Por otra parte, los operadores con coeficientes variables generalmente no poseen la propiedad de conmutatividad; ver problema 22.

Volviendo al sistema (7), ahora es un asunto simple eliminar una u otra de las variables independientes x_1 o x_2. Para eliminar x_1 necesitamos solamente

aplicar L_3 a la primera ecuación, L_1 a la segunda ecuación, y restar entonces la primera de la segunda. De aquí que

$$L_3L_1[x_1] + L_3L_2[x_2] = L_3[g_1], \quad (16)$$

$$L_1L_3[x_1] + L_1L_4[x_2] = L_1[g_2], \quad (17)$$

y restando la Ec. (16) de la (17) se obtiene

$$L_1L_4[x_2] - L_3L_2[x_2] = L_1[g_2] - L_3[g_1]. \quad (18)$$

La Ec. (18) no involucra x_1 y puede resolverse por método estándar. Una vez que se determina x_2 de la Ec. (18), puede encontrarse x_1 resolviendo cualquiera de las Ecs. (7). Alternativamente, x_2 puede ser eliminada del sistema en una forma similar. Nótese que al usar este método las funciones g_1 y g_2 deberán poseer suficientes derivadas de tal forma que sea posible calcular cantidades tales como $L_1[g_2]$ y $L_3[g_1]$ en la Ec. (18).

En general, se introducirán varias constantes extrañas durante el proceso de resolver para x_1 y x_2. Al resolver la Ec. (18) para x_2 el número de constantes arbitrarias será igual al orden* del operador $L_1L_4 - L_3L_2$. Se introducen constantes adicionales cuando se determina x_1 al resolver cualquiera de las Ecs. (7). Se pueden encontrar las relaciones entre las constantes, y eliminar las extrañas, substituyendo x_1 y x_2 en cualquiera de las Ecs. (7) que no ha sido usada para encontrar x_1. Esto está ilustrado en un ejemplo que aparecerá después.

La cuestión del número de constantes arbitrarias que debe aparecer en la solución general del sistema (7) puede responderse en la forma siguiente. Si el sistema (7) fuera reducido a un sistema de ecuaciones de primer orden, entonces el número de constantes independientes en la solución general deberá ser igual al número de ecuaciones en el sistema. Esto se establecerá en la sección 6.4. Eliminado x_1 obtenemos una sola ecuación cuyo orden es el del operador $L_1L_4 - L_3L_2$. Esta última ecuación puede transformarse a su vez en un sistema de ecuaciones de primer orden iguales en número al orden de $L_1L_4 - L_3L_2$. Es por lo tanto razonable esperar, y puede probarse que esto es cierto, que el número de constantes arbitrarias independientes en la solución general de la Ec. (7) es igual al orden de $L_1L_4 - L_3L_2$, siempre y cuando que $L_1L_4 - L_3L_2$ no sea cero. Este hecho puede usarse para comprobar que el número correcto de constantes arbitrarias aparece en la solución final. El resultado puede también extenderse a sistemas de ecuaciones más grandes.

Ejemplo. Encuentre la solución general de

$$(x_1'' + x_1' - x_1) + (x_2'' - 3x_2' + 2x_2) = 0, \quad (19)$$

$$(x_1' + 2x_1) + \qquad (2x_2' - 4x_2) = 0. \quad (20)$$

* Por el orden de $L_1L_4 - L_3L_2$ entendemos el orden de la derivada más alta que aparece en él. Si $L_1L_4 - L_3L_2$ es cero, se dice que el sistema (7) es *degenerado*. En este caso puede haber, o un número infinito de soluciones, o ninguna, dependiendo de que el miembro derecho de la Ec. (18) se anule o no. Ver los problemas 18 a 21. La situación aquí es similar a la de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales cuyo determinante de coeficientes se anula.

En este caso $L_1[x_1] = (D^2 + D - 1)x_1$, $L_2[x_2] = (D^2 - 3D + 2)x_2$, $L_3[x_1] = (D + 2)x_1$, y $L_4[x_2] = (2D - 4)x_2$. Aplicando L_3 y L_1 a las Ecs. (19) y (20) respectivamente, y restando los resultados se obtiene

$$(L_1L_4 - L_3L_2)[x_2]$$

$$= [(D^2 + D - 1)(2D - 4) - (D + 2)(D^2 - 3D + 2)]x_2 = 0$$

o

$$(D^3 - D^2 - 2D)x_2 = 0. \quad (21)$$

Por lo tanto la solución general del sistema (19), (20) deberá contener tres constantes arbitrarias. La solución general de la Ec. (21) es

$$x_2 = \phi_2(t) = c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-t}. \quad (22)$$

Substituyendo esta expresión para x_2 en la Ec. (20) nos da

$$x_1' + 2x_1 = 4c_1 + 6c_3e^{-t}, \quad (23)$$

cuya solución general es

$$x_1 = \phi_1(t) = 2c_1 + 6c_3e^{-t} + c_4e^{-2t}. \quad (24)$$

Para eliminar la constante extraña substituimos x_1 y x_2 en la Ec. (19), y encontramos que $c_4 = 0$. Nótese que si substituimos x_2 en la Ec. (19) y resolvemos entonces esta ecuación de segundo orden para x_1, deberemos introducir dos constantes extrañas en lugar de una. Estas deberán eliminarse substituyendo x_1 y x_2 en la Ec. (20).

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 11 resuelva para el sistema dado de ecuaciones

1. $x_1' = x_1 + x_2$
   $x_2' = 4x_1 - 2x_2$

2. $x_1' = x_1 + x_2 + 2e^t$
   $x_2' = 4x_1 + x_2 - e^t$

3. $x_1' = 2x_1 - 5x_2 - \operatorname{sen} 2t, \quad x_1(0) = 0$
   $x_2' = x_1 - 2x_2 + t, \quad x_2(0) = 1$

4. $x_1' = x_1 - x_2 - t^2$
   $x_2' = x_1 + 3x_2 + 2t$

5. $x_1' = 3x_1 - 4x_2 + e^t, \quad x_1(0) = 1$
   $x_2' = x_1 - x_2 - e^t, \quad x_2(0) = -1$

6. $x_1' = 4x_1 - 2x_2 + 2t$
   $x_2' = 8x_1 - 4x_2 + 1$

7. $x_1' = 3x_1 - 2x_2 - e^{-t} \operatorname{sen} t$
   $x_2' = 4x_1 - x_2 + 2e^{-t} \cos t$

8. $x_1' = x_1 - 5x_2, \quad x_1(0) = 1$
   $x_2' = 2x_1 - 5x_2, \quad x_2(0) = 0$

9. $x_1' = x_1$
   $x_2' = -x_2 + \sqrt{2}x_3$
   $x_3' = \sqrt{2}x_2$

10. $x_1' = x_1 - x_2 + 4x_3$
$x_2' = 3x_1 + 2x_2 - x_3$
$x_3' = 2x_1 + x_2 - x_3$

11. $x_1' = x_1 + x_2 + x_3$
$x_2' = 2x_1 + x_2 - x_3$
$x_3' = -8x_1 - 5x_2 - 3x_3$

12. Resuelva el ejemplo problema, Ecs. (19) y (20) substituyendo x_2 de la Ec. (22) en la Ec. (19).

En cada uno de los problemas 13 a 17, resuélvase el sistema dado de ecuaciones. Asegúrese de que aparece el número apropiado de constantes arbitrarias en la solución general.

13. $(D^2 - 3D + 2)x_1 + (D - 1)x_2 = 0$
$(D - 2)x_1 + (D + 1)x_2 = 0$

14. $(2D + 1)x_1 + Dx_2 = t$
$(D - 1)x_1 + Dx_2 = 2$

15. $(D^2 - 4D + 4)x_1 + 3Dx_2 = 1$
$(D - 2)x_1 + (D + 2)x_2 = 0$

16. $D^2x_1 + (D + 1)x_2 = 0$
$(D - 1)x_1 + x_2 = \text{sen}\, t$

17. $(D^2 - 4D + 4)x_1 + (D^2 + 2D)x_2 = 0$
$(D^2 - 2D)x_1 + (D^2 + 4D + 4)x_2 = 0$

En cada uno de los problemas 18 a 21, muéstrese que el sistema dado de ecuaciones es degenerado. Determínese, al intentar resolver el sistema, cuándo no hay soluciones o cuándo hay un número infinito.

18. $Dx_1 + (D + 1)x_2 = t$
$Dx_1 + (D + 1)x_2 = t + 2$

19. $(D + 2)x_1 + (D + 2)x_2 = e^{2t}$
$(D - 2)x_1 + (D - 2)x_2 = e^{-2t}$ *Indicación:* Sea $u = x_1 + x_2$

20. $(D^2 - 1)x_1 + (D - 1)x_2 = \text{sen}\, t$
$(D + 1)x_1 + x_2 = 2e^t$

21. $(D^2 + 3D + 2)x_1 + (D^2 + 2D)x_2 = 0$
$(D + 1)x_1 + Dx_2 = 0$

22. Los operadores diferenciales lineales con coeficientes variables pueden no conmutar. Considérense los operadores

$$L_1[x] = x' + tx, \qquad L_2[x] = x' + t^2x.$$

Muéstrese que

$$L_1L_2[x] = L_1\{L_2[x]\} = x'' + (t^2 + t)x' + (2t + t^3)x,$$

y que

$$L_2L_1[x] = L_2\{L_1[x]\} = x'' + (t + t^2)x' + (1 + t^3)x.$$

Por lo tanto

$$L_1L_2[x] \neq L_2L_1[x].$$

6.3 REPASO DE MATRICES

En tanto que el proceso de eliminación discutido en la última sección es un método generalmente satisfactorio de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales cuando el número de ecuaciones es pequeño, cuando se consideran sistemas más grandes el método se hace rápidamente inaplicable, además, lo que es más importante, este método proporciona una base adecuada para un desarrollo sistemático de la teoría asociada con tales ecuaciones. Por ambas razones es conveniente revisar algunos resultados de la teoría de matrices antes de considerar el problema de valores iniciales para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Para propósitos de referencia esta sección está dedicada a hacer un breve resumen* de algunas de las cosas que necesitaremos posteriormente. Supondremos, sin embargo, que el lector está familiarizado con los determinantes y la forma de calcularlos.

Designaremos a las matrices por letras mayúsculas negritas **A**, **B**, **C**, . . . pero ocasionalmente usaremos letras mayúsculas griegas $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Psi}$, ... Una matriz **A** consiste de un arreglo rectangular de números, o elementos, arreglados en m renglones y n columnas, esto es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Nos referimos a **A** como una matriz $n \times m$. Aunque posteriormente en este capítulo supondremos a menudo que los elementos de ciertas matrices son números reales, en esta sección supondremos que los elementos de las matrices pueden ser números complejos. El elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna se designa por a_{ij}, el primer índice identifica al renglón y el segundo a la columna. Algunas veces se usa la notación (a_{ij}) para denotar la matriz cuyo elemento genérico es a_{ij}.

Asociada con cada matriz **A** está la matriz $\mathbf{A}^T$, conocida como la transpuesta de **A**, y obtenida de **A** intercambiando renglones y columnas de **A**. Por lo tanto, si $\mathbf{A} = (a_{ij})$, entonces $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$. También, denotaremos por $\bar{a}_{ij}$ el complejo conjugado de a_{ij}, y por $\bar{\mathbf{A}}$ la matriz obtenida de **A** reemplazando cada elemento a_{ij} por su conjugado $\bar{a}_{ij}$. La matriz $\bar{\mathbf{A}}$ es llamada la conjugada de **A**. Será también necesario considerar la transpuesta de la matriz conjugada de $\bar{\mathbf{A}}^T$. Esta matriz es llamada la adjunta de **A** y es denotada por $\mathbf{A}^*$.

Estaremos interesados particularmente en dos clases algo especiales de matrices: las matrices cuadradas, que tienen el mismo número de renglones que de columnas, esto es, $m = n$; y los vectores (o vectores columna) que pueden pensarse como matrices $n \times 1$, o matrices que tienen solamente una columna. Las matrices cuadradas que tienen n renglones y n columnas se

* Hay muchos libros que tratan de los elementos del álgebra matricial. Una lista representativa aparece al final del capítulo.

dice que son de orden n. Denotaremos los vectores (columna) por letras minúsculas negritas $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$. La transpuesta $\mathbf{x}^T$ de un vector columna $n \times 1$ es un vector renglón $1 \times n$, esto es, la matriz que consiste de un renglón cuyos elementos son los mismos que los elementos en la posición correspondiente de $\mathbf{x}$.

Operaciones Algebraicas

1. *Igualdad.* Dos matrices $m \times n$ $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se dice que son iguales si sus correspondientes elementos son iguales, esto es, si $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y j.
2. *Adición.* La suma de dos matrices $m \times n$ está definida como la matriz obtenida sumando los elementos correspondientes:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}). \tag{2}$$

La suma de matrices es conmutativa y asociativa, tal que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}. \tag{3}$$

3. *Multiplicación por un número.* El producto de una matriz $\mathbf{A}$ por un número complejo α está definida como sigue

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}). \tag{4}$$

Las leyes distributivas

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \qquad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \tag{5}$$

se satisfacen por este tipo de multiplicación.

4. *Multiplicación.* El producto $\mathbf{AB}$ de dos matrices está definida siempre y cuando el número de columnas del primer factor sea el mismo que el número de renglones del segundo. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices $m \times n$ y $n \times r$ respectivamente, entonces el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ es una matriz $m \times r$. El elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de $\mathbf{C}$ se encuentra multiplicando cada elemento del i-ésimo renglón de $\mathbf{A}$ por el elemento correspondiente de la j-ésima columna de $\mathbf{B}$ y sumando entonces los productos resultantes. Simbólicamente

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{6}$$

La multiplicación de matrices satisface la ley asociativa

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}), \tag{7}$$

y la ley distributiva

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \tag{8}$$

Sin embargo, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa. Para que existan ambos productos $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BA}$ es necesario que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean matrices cuadradas del mismo orden. Aun en este caso los dos productos no necesariamente son iguales, de tal forma que, en general

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \tag{9}$$

Ejemplo 1. Para ilustrar la multiplicación de matrices, y también el hecho de que la multiplicación matricial no necesariamente es conmutativa, consideremos las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la definición de multiplicación dada en la Ec. (6) tenemos

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2-2+2 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 4+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

similarmente, encontramos que

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

---

5. *Multiplicación de vectores.* La multiplicación matricial, tal como se describió antes, se aplica también, como un caso especial, si las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores renglón y columna $1 \times n$ y $n \times 1$ respectivamente. Denotando estos vectores por $\mathbf{x}^T$ y $\mathbf{y}$, tenemos

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{10}$$

El resultado de tal operación es un número (complejo), y es claro de la Ec. (10) que

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}^T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}, \qquad (\alpha\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{y}). \tag{11}$$

Hay otro tipo muy útil de multiplicación vectorial, que está definida también para cualesquiera dos vectores que tengan el mismo número de

componentes. Este producto, denotado por (x, y) se llama el producto escalar o producto interno, y está definido por

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i. \tag{12}$$

El producto escalar también es un número (complejo), y comparando las Ecs. (10) y (12) podemos ver que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}}. \tag{13}$$

De la Ec. (12) se concluye que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, \qquad & (\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ (\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) &= \bar{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{14}$$

Aun si el vector **x** tiene elementos con partes imaginarias diferentes de cero, el producto interno de **x** con sí mismo nos da un número real no negativo,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2; \tag{15}$$

sin embargo, el producto matricial de **x** con sí mismo

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{16}$$

puede no ser un número real. Si todas las componentes del segundo factor **y** son reales, los productos (x, y) y $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ son idénticos, y ambos se reducen al producto punto que se encuentra usualmente en los textos de física o geometría para $n = 3$.

6. *Identidad.* La identidad multiplicativa, o simplemente la matriz identidad **I**, está dada por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \ddots & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

De la definición de multiplicación matricial tenemos

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \tag{18}$$

para cualquier matriz (cuadrada) **A**. Por lo tanto, la ley conmutativa vale para matrices cuadradas si una de ellas es la matriz identidad.

7. *Cero.* El símbolo **0** será usado para denotar a la matriz (o vector) cuyos elementos sean todos cero.

Solución de Ecuaciones Algebraicas. Un conjunto de n ecuaciones algebraicas lineales simultáneas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{19}$$

puede escribirse como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{20}$$

donde están dados la matriz $n \times n$ **A** y el vector **b**, y deben determinarse las componentes de **x**. Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, se dice que el sistema es homogéneo; de cualquier otra forma, es nohomogéneo. Si el determinante de los coeficientes det **A** no es cero, entonces hay una solución única del sistema (20). En particular, si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución. Sin embargo, si det **A** es cero, la situación es más complicada. En este caso el sistema homogéneo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{21}$$

tiene un número infinito de soluciones diferentes de cero. Por otra parte, el sistema nohomogéneo (20) no tiene solución a menos de que el vector **b** satisfaga una cierta condición adicional, esto es,

$$(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0, \tag{22}$$

para todos los vectores **y** que satisfacen el sistema adjunto $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Si se llena la condición (22), el sistema (20) tiene (un número infinito) soluciones. Cada una de estas soluciones tiene la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\xi}, \tag{23}$$

donde $\mathbf{x}^{(0)}$ es una solución particular de la Ec. (20), y donde $\boldsymbol{\xi}$ es alguna solución del sistema homogéneo (21).

Independencia Lineal. Un conjunto de k vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ se dice que es *linealmente dependiente* si existe un conjunto de números (complejos) $c_1, \ldots, c_k$, al menos uno diferente de cero, tales que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}. \tag{24}$$

En otras palabras, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ son linealmente dependientes si hay una relación lineal entre ellos. Por otra parte, si el único conjunto $c_1, \ldots, c_k$ para el cual se satisface la Ec. (24) es $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, entonces $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ se dice que son *linealmente independientes.*

Considérese ahora un conjunto de n vectores, cada uno de los cuales tiene n componentes. Sea $x_{ij} = x_i^{(j)}$ la i-ésima componente del vector $\mathbf{x}^{(j)}$, y sea $\mathbf{X} = (x_{ij})$. Entonces la Ec. (24) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}c_1 + \cdots + x_1^{(n)}c_n \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ x_n^{(1)}c_1 + \cdots + x_n^{(n)}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}c_1 + \cdots + x_{1n}c_n \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ x_{n1}c_1 + \cdots + x_{nn}c_n \end{pmatrix} = \mathbf{Xc} = \mathbf{0}. \tag{25}$$

Si $\det \mathbf{X} \neq 0$, entonces la única solución de la Ec. (25) es $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, pero si $\det \mathbf{X} = 0$, hay soluciones diferentes de cero. Por lo tanto el conjunto de vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det \mathbf{X} \neq 0$.

Ejemplo 2. Considérense los vectores

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Para determinar en qué casos $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, y $\mathbf{x}^{(3)}$ son linealmente dependientes calculamos $\det(x_{ij})$ cuyas columnas son las componentes de $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, y $\mathbf{x}^{(3)}$ respectivamente. De aquí que

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix},$$

y un cálculo elemental muestra que éste es cero. Por lo tanto $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, y $\mathbf{x}^{(3)}$ son linealmente dependientes, y hay constantes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + c_3\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}. \tag{26}$$

Ya que el determinante de los coeficientes es cero, el sistema homogéneo (26) tiene soluciones no triviales, y dos de las tres constantes c_1, c_2 y c_3 pueden determinarse en términos de la tercera. La ecuación (26) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 4c_3, \\ 2c_1 + c_2 &= -c_3, \\ -c_1 + 3c_2 &= 11c_3. \end{aligned}$$

Por conveniencia tomaremos $c_3 = -1$. Resolviendo entonces las primeras dos de estas ecuaciones se obtiene $c_1 = 2$, $c_2 = -3$, y estos valores satisfacen también la tercera ecuación. Por lo tanto la relación entre $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, y $\mathbf{x}^{(3)}$ es $2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$.

Frecuentemente es útil pensar que las columnas (o renglones) de una matriz $\mathbf{A}$ son vectores. Estos vectores columna (o renglón) son linealmente independientes si y sólo si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Además, si $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, entonces puede mostrarse que $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$. Por lo tanto, si las columnas (o renglones) de tanto $\mathbf{A}$ como $\mathbf{B}$ son linealmente independientes, lo serán también las columnas (o renglones) de $\mathbf{C}$.

Eigenvalores y Eigenvectores. La ecuación

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{27}$$

puede verse como una transformación lineal que mapea (o transforma) un vector dado $\mathbf{x}$ en un nuevo vector $\mathbf{y}$. Los vectores que se transforman en múltiplos de sí mismos juegan un papel muy importante en muchas aplicaciones. Para encontrar tales vectores hagamos $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, donde λ es un factor de proporcionalidad escalar, y busquemos soluciones de las ecuaciones

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \tag{28}$$

ó

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{29}$$

La última ecuación tiene soluciones diferentes de cero si y sólo si λ se elige de tal forma que

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{30}$$

Los valores de λ que satisfacen la Ec. (30) se llaman *eigenvalores* de la matriz $\mathbf{A}$, y las soluciones de la Ec. (28) o (29) que se obtienen usando tales valores λ se llaman los *eigenvectores* correspondiendo a ese eigenvalor. Los eigenvectores se determinan sólo hasta una constante multiplicativa arbitraria, que se elige generalmente por alguna razón de conveniencia, tal como hacer alguna de las componentes del eigenvector igual a uno.

Ya que la Ec. (30) es una ecuación polinomial de grado n en λ hay n eigenvalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, algunos de los cuales pueden ser repetidos. Si un eigenvalor dado aparece m veces como una raíz de la Ec. (30), entonces se dice que el eigenvalor tiene una *multiplicidad m*. Cada eigenvalor tiene al menos un eigenvector asociado y, en general, un eigenvalor de multiplicidad m tiene q eigenvectores linealmente independientes, donde

$$1 \leq q \leq m. \tag{31}$$

El hecho de que q pueda no ser igual a m, si $m > 1$, se ilustra por los problemas 15, 18 y 20 al final de esta sección. Si todos los eigenvalores de una matriz $\mathbf{A}$ son *simples* (tienen multiplicidad uno), entonces es posible mostrar que los n eigenvectores de $\mathbf{A}$, uno para cada eigenvalor, son linealmente independientes; ver problema 22. Por otra parte, si $\mathbf{A}$ tiene uno o más eigenvalores repetidos, entonces puede haber menos de n eigenvectores linealmente independientes asociados con $\mathbf{A}$, ya que el miembro derecho de la Ec. (31) puede ser una desigualdad estricta para uno o más de los eigenvalores repetidos. Este hecho conduce a complicaciones posteriores cuando se trata de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.

Una importante clase especial de matrices, llamadas las matrices autoadjuntas o hermitianas, son aquellas para las que $A^* = A$, esto es $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$. Las matrices hermitianas incluyen como subclase a las matrices simétricas reales, esto es, matrices que tienen elementos reales y para las cuales $A^T = A$. Los eigenvalores y eigenvectores de las matrices hermitianas siempre tienen las propiedades siguientes.

1. Todos los valores propios de una matriz hermitiana son reales.
2. Existe siempre un conjunto completo de n eigenvectores, sin que nada tenga que ver las multiplicidades de los eigenvalores.
3. Si $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$ son eigenvectores que corresponden a diferentes eigenvalores, entonces $(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0$.

Matrices Funciones. Algunas veces necesitaremos considerar vectores o matrices cuyos elementos sean funciones de una variable real t. Escribimos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{32}$$

respectivamente. Los vectores $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(k)}(t)$ se dice que son linealmente dependientes sobre un intervalo $\alpha < t < \beta$ si existe un conjunto de constantes $c_1, \ldots, c_k$, no todas cero, tales que $c_1 x^{(1)}(t) + \cdots + c_k x^{(k)}(t) = \mathbf{0}$ para toda t en el intervalo. De cualquier otra forma, se dice que $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(k)}(t)$ son linealmente independientes. Nótese que si $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(k)}(t)$ son linealmente dependientes sobre un intervalo, son linealmente dependientes en cada punto del intervalo. Sin embargo, si $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(k)}(t)$ son linealmente independientes sobre un intervalo; pueden ser o no linealmente independientes en cada punto, pueden, de hecho, ser linealmente dependientes en cada punto, pero con diferentes conjuntos de constantes en puntos diferentes. Ver el problema 24 para un ejemplo.

Se dice que la matriz $\mathbf{A}(t)$ es continua en $t = t_0$ o sobre un intervalo $\alpha < t < \beta$ si cada elemento de $\mathbf{A}$ es una función continua en el punto dado o sobre el intervalo dado. Similarmente, se dice que $\mathbf{A}(t)$ es derivable si cada uno de sus elementos lo es, y su derivada $d\mathbf{A}/dt$ está definida por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right); \tag{33}$$

esto es, cada elemento de $d\mathbf{A}/dt$ es la derivada del elemento correspondiente de $\mathbf{A}$. En la misma forma está definida la integral de una matriz función

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)\,dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right). \tag{34}$$

Muchas de las reglas del cálculo elemental pueden extenderse fácilmente a las funciones matrices; en particular,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \text{ donde } \mathbf{C} \text{ es una matriz constante;} \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \tag{36}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}. \tag{37}$$

En las Ecs. (35) y (37) se debe tener cuidado en cada término para evitar que por falta de cuidado se intercambie el orden de la multiplicación. Las definiciones expresadas por las Ecs. (33) y (34) se aplican también en casos especiales a vectores.

PROBLEMAS

Dadas, en los problemas 1 a 4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Encontrar

a) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *b*) $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$
c) $\mathbf{AB}$ *d*) $\mathbf{BA}$

2. Encontrar

a) $\mathbf{A}^T$ *b*) $\mathbf{B}^T$
c) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ *d*) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

3. Verificar que $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

4. Verificar que

a) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ *b*) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

5. Probar cada una de las siguientes leyes del álgebra matricial

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ *b*) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
c) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ *d*) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$
e) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ *f*) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

En cada uno de los problemas 6 a 10, resuélvase el conjunto dado de ecuaciones o, en su caso, demuéstrese que no hay solución.

6. $x_1 - x_3 = 0$
$3x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$

7. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$

8. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = -1$

9. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

10. $x_1 - x_3 = 0$
$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

11. Determine en qué casos cada uno de los siguientes conjuntos de vectores es linealmente independiente. Si es linealmente dependiente, encuéntrese la relación lineal que hay entre ellos. Los vectores se escriben como vectores renglón para ahorrar espacio, pero pueden considerarse como vectores columna si se desea; esto es, los transpuestos de los vectores dados pueden usarse en lugar de los vectores mismos.

a) $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1, 0, 1)$

b) $\mathbf{x}^{(1)} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 2, 0)$

c) $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, 2, 3)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (-1, 0, 3, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-2, -1, 1, 0)$
$\mathbf{x}^{(4)} = (-3, 0, -1, 3)$

d) $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (2, 3, 1, -1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0, 2, 2)$
$\mathbf{x}^{(4)} = (3, -1, 1, 3)$

e) $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (2, -1, 1)$,
$\mathbf{x}^{(4)} = (4, 3, -2)$

12. Supóngase que los vectores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ tienen cada uno n componentes donde $n < m$. Mostrar que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ son linealmente dependientes.

En cada uno de los problemas 13 a 21 encuéntrense todos los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz dada.

13. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

22. Supóngase que $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$ son eigenvectores de la matriz $\mathbf{A}$ correspondientes a los eigenvalores λ_1 y λ_2, respectivamente, donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En este problema estableceremos la independencia lineal de $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$ suponiendo que ellos son linealmente dependientes, y mostrando que esta suposición conduce a una contradicción.

a) Nótese que $\xi^{(1)}$ satisface la ecuación matricial $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\xi^{(1)} = \mathbf{0}$; similarmente, nótese que $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\xi^{(2)} = \mathbf{0}$.

b) Muéstrese que $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\xi^{(1)} = (\lambda_1 - \lambda_2)\xi^{(1)}$.

c) Supóngase que $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$ son linealmente dependientes. Entonces $c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)} = \mathbf{0}$ y al menos una de c_1 o c_2 no es cero; supóngase $c_1 \neq 0$. Muéstrese que $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}) = \mathbf{0}$, y también que $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}) = c_1(\lambda_1 - \lambda_2)\xi^{(1)}$. De aquí que $c_1 = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$ son linealmente independientes.

d) Modifíquese el argumento de la parte *c*) en el caso de que c_1 sea cero pero c_2 no.

e) Llévese a cabo un argumento similar si $\mathbf{A}$ es una matriz de tercer orden con tres distintos eigenvalores. Nótese que el procedimiento puede extenderse a matrices de orden arbitrario.

23. Si $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$,

encuéntrese

a) $\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

b) $\mathbf{AB}$

c) $d\mathbf{A}/dt$

d) $\int_0^1 \mathbf{A}(t)\, dt$

24. Determínese cuándo cada uno de los siguientes conjuntos de vectores es linealmente independiente para $-\infty < t < \infty$. Si es linealmente dependiente, encuéntrese la relación lineal. Como en el problema 11, los vectores se escriben como vectores renglón para ahorrar espacio.

a) $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t})$, $\mathbf{x}^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t})$, $\mathbf{x}^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0)$

b) $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (2 \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t) = (\operatorname{sen} t, 2 \operatorname{sen} t)$

25. Dados

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Mostrar que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ son linealmente dependientes en cada punto en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Sin embargo, mostrar que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ son linealmente independientes sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$.

En cada uno de los problemas 26 a 28, verifíquese que el vector dado satisface la ecuación diferencial dada.

26. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}$

27. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^t$

28. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}e^{-t} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}$

En cada uno de los problemas 29 a 30, verifíquese que la matriz dada satisface la ecuación diferencial dada.

29. $\mathbf{\Psi}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{\Psi}, \qquad \mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

30. $\mathbf{\Psi}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{\Psi}, \qquad \mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$

6.4 TEORIA BASICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

La teoría general de un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\;\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t), \end{aligned} \tag{1}$$

corre paralelamente con la referente a una sola ecuación lineal de enésimo orden. Por lo tanto, la discusión en esta sección sigue las mismas líneas generales que en las secciones 3.2, 3.3, y 5.2. Para discutir el sistema (1) más efectivamente, lo escribiremos en notación matricial. Esto es, consideraremos $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ como componentes de un vector $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$; similarmente $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ son componentes de un vector $\mathbf{g}(t)$, y $p_{11}(t), \ldots, p_{nn}(t)$ son elementos de una matriz $n \times n$ $\mathbf{P}(t)$. La ecuación (1) toma entonces la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \tag{2}$$

El uso de vectores y matrices no sólo ahorra mucho espacio y facilita los cálculos, sino que también enfatiza la similaridad entre sistemas de ecuaciones y ecuaciones simples (escalares).

Se dice que un vector $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ es una solución de la Ec. (2) si sus componentes satisfacen el sistema de ecuaciones (1). A todo lo largo de esta sección supondremos que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{g}$ son continuos sobre algún intervalo $\alpha < t < \beta$; esto es, cada una de las funciones escalares $p_{11}, \ldots, p_{nn}$, $g_1, \ldots, g_n$ es continua ahí. De acuerdo con el Teorema 6.2, esto es suficiente para garantizar la existencia de soluciones de la Ec. (2) sobre el intervalo $\alpha < t < \beta$.

Es conveniente considerar primero la ecuación homogénea

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \tag{3}$$

obtenida de la Ec. (2) haciendo $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$. Usaremos la notación

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \ldots \tag{4}$$

para designar soluciones específicas del sistema (3). Nótese que $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ se refiere a la i-ésima componente de la j-ésima solución $\mathbf{x}^{(j)}(t)$. Los principales hechos acerca de la estructura de las soluciones del sistema (3) están establecidos en los Teoremas 6.3 a 6.6. Ellos se parecen mucho a los correspondientes Teoremas en las secciones 3.2, 3.3 y 5.2; se dejan al lector algunas de las pruebas como ejercicios.

Teorema 6.3. Si las funciones vector $\mathbf{x}^{(1)}$ *y* $\mathbf{x}^{(2)}$ *son soluciones del sistema* (3), *entonces la combinación lineal* $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ *es también una solución para cualesquiera constantes* c_1 *y* c_2.

Este es el principio de superposición; se prueba simplemente derivando $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ y usando el hecho de que $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ satisfacen la Ec. (3). Como un ejemplo, se puede verificar que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{5}$$

satisfacen la ecuación

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{6}$$

De acuerdo con el Teorema 6.3

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

también satisface la Ec. (6). Esta solución del sistema (6) se encontró en la sección 6.2 por el método de eliminación.

Aplicando repetidamente el Teorema 6.3, llegamos a la conclusión de que si $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ son soluciones de la Ec. (3), entonces

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_k \mathbf{x}^{(k)}(t) \tag{8}$$

es también una solución para cualesquiera constantes $c_1, \ldots, c_k$. La cuestión que ahora surge es: si todas las soluciones de la Ec. (3) pueden encontrarse de esta manera. Por analogía con los casos anteriores es razonable esperar que para un sistema de la forma (3), de enésimo orden, es suficiente formar combinaciones lineales de n soluciones adecuadamente elegidas. Por lo tanto, sean $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ n soluciones del sistema de enésimo orden (3), y considérese la matriz $\mathbf{X}(t)$ cuyas columnas son los vectores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$;

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Recuerde de la sección 6.3 que las columnas de $\mathbf{X}(t)$ son linealmente independientes para un valor dado de t si y sólo si $\det \mathbf{X} \neq 0$ para ese valor de t. Este determinante es llamado el Wronskiano de las n soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$, denotado por $W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})$, esto es,

$$W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}) = \det \mathbf{X}. \tag{10}$$

vemos entonces que las soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ son linealmente independientes en un punto si y sólo si $W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})$ no es cero en ese punto.

Teorema 6.4. Si las funciones vector $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ *son soluciones linealmente independientes del sistema* (3) *para cada punto en el intervalo* $\alpha < t < \beta$, *entonces cada solución* $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ *del sistema* (3) *puede expresarse como una combinación lineal de* $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$,

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t), \tag{11}$$

exactamente de una sola forma.

Antes de probar el Teorema 6.4, nótese que de acuerdo con el Teorema 6.3 todas las expresiones de la forma (11) son soluciones del sistema (3), mientras que por el Teorema 6.4 todas las soluciones de la Ec. (3) pueden escribirse en la forma (11). Si las constantes $c_1, \ldots, c_n$ son pensadas como arbitrarias, entonces la Ec. (11) incluye todas las soluciones del sistema (3), y se acostumbra llamarla la *solución general*. Cualquier conjunto de soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ de la Ec. (3), que es linealmente independiente en cada punto en el intervalo $\alpha < t < \beta$, se dice que, es un *conjunto fundamental de soluciones* para ese intervalo.

Para probar el Teorema 6.4 mostraremos, dada cualquier solución $\boldsymbol{\phi}$ de la Ec. (3), que $\boldsymbol{\phi}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ para valores adecuados de $c_1, \ldots, c_n$. Sea $t = t_0$ algún punto en el intervalo $\alpha < t < \beta$, y sea $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\phi}(t_0)$. Deseamos determinar si hay alguna solución de la forma $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ que satisface también la misma condición inicial, $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$. Esto es, deseamos saber si existen valores de $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \boldsymbol{\xi}, \tag{12}$$

o en forma escalar

$$\begin{aligned} c_1 x_{11}(t_0) + \cdots + c_n x_{1n}(t_0) &= \xi_1, \\ &\vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + \cdots + c_n x_{nn}(t_0) &= \xi_n. \end{aligned} \tag{13}$$

La condición necesaria y suficiente para que las Ecs. (13) posean una solución única $c_1, \ldots, c_n$ es precisamente que no se anule el determinante de los coeficientes, que es el Wronskiano $W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})$ calculado en $t = t_0$. La hipótesis de que $\mathbf{x}^{(1)}$ hasta $\mathbf{x}^{(n)}$ son linealmente independientes en todo el intervalo $\alpha < t < \beta$ garantiza que $W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})$ no es cero en $t = t_0$, y por lo tanto que hay una solución (única) de la Ec. (3) de la forma $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ que también satisface la condición inicial (12). Por la parte de la unicidad del Teorema 6.2 esta solución es idéntica a $\boldsymbol{\phi}(t)$, y por lo tanto $\boldsymbol{\phi}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ como queríamos probar.

Teorema 6.5. Si $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ *son soluciones de la Ec.* (3) *sobre el intervalo* $\alpha < t < \beta$, *entonces en este intervalo* $W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})$ *o es idénticamente cero o nunca se anula.*

El significado del Teorema 6.5 está centrado en el hecho de que nos evita la necesidad de examinar $W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})$ en todos los puntos sobre el intervalo de interés, y hace que podamos determinar si $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones evaluando simplemente su Wronskiano en cualquier punto conveniente dentro del intervalo.

El Teorema 6.5 se prueba estableciendo primero que el Wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})W. \tag{14}$$

Aquí W es una función exponencial, y la conclusión del Teorema se obtiene inmediatamente. La expresión para W obtenida resolviendo la Ec. (14) se conoce como fórmula de Abel; nótese la analogía con la Ec. (13) de la sección 3.2.

Alternativamente, el Teorema 6.5 puede establecerse mostrando que si n soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ de la Ec. (3) son linealmente dependientes en un punto $t = t_0$, entonces deben ser linealmente dependientes en cada punto de $\alpha < t < \beta$; ver el problema 8. Consecuentemente, si $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ son linealmente independientes en un punto, deben ser linealmente independientes en cada punto del intervalo.

El siguiente Teorema establece que el sistema (3) siempre tiene, al menos, un conjunto fundamental de soluciones.

Teorema 6.6. Sea

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

y además sean $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ *las soluciones del sistema* (3) *que satisfacen las condiciones iniciales*

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{e}^{(n)}, \tag{15}$$

respectivamente, donde t_0 *es cualquier punto en* $\alpha < t < \beta$. *Entonces* $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ *forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema* (3).

Para probar este Teorema, nótese que la existencia y la unicidad de las soluciones $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ mencionadas en el Teorema 6.6 están aseguradas por el Teorema 6.2. No es difícil ver que el Wronskiano de estas soluciones es igual a uno cuando $t = t_0$; por lo tanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

Una vez que se ha encontrado un conjunto fundamental de soluciones, se pueden generar otros conjuntos formando combinaciones lineales (independientes) del primer conjunto. Para propósitos teóricos el conjunto dado por el Teorema 6.6 es generalmente el más simple.

Para resumir, cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes del sistema (3) constituye un conjunto fundamental de soluciones. Bajo las condiciones dadas en esta sección, tales conjuntos fundamentales siempre existen, y cada solución del sistema (3) puede representarse como una combinación lineal de cualquier conjunto fundamental de soluciones.

Sistemas Nohomogéneos. Vamos ahora a volver al sistema nohomogéneo (2)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t).$$

Si $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ y $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(t)$ son dos soluciones de la Ec. (2), se concluye entonces que

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\phi}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)]' &= \boldsymbol{\phi}'(t) - \boldsymbol{\psi}'(t) \\ &= \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{g}(t) - [\mathbf{P}(t)\boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{g}(t)] \\ &= \mathbf{P}(t)[\boldsymbol{\phi}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)].\end{aligned}$$

Consecuentemente, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)$ es una solución de la ecuación homogénea (3). Ya que cualquier solución de la ecuación homogénea puede expresarse como una combinación lineal del conjunto fundamental de soluciones $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ de la Ec. (3), se concluye, justamente como para la ecuación escalar, que cualquier solución $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ de la Ec. (2) puede escribirse como

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) + c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t), \tag{16}$$

donde $\boldsymbol{\psi}$ es una *solución particular* de la Ec. (2) y $c_1, \ldots, c_n$ son constantes apropiadamente elegidas. Si se piensa que estas constantes son arbitrarias, se acostumbra entonces llamar, a la expresión del miembro derecho de la Ec. (16), la *solución general* del sistema nohomogéneo (2).

Una vez que se ha encontrado un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo correspondiente, puede usarse el método de variación de parámetros para encontrar una solución del sistema nohomogéneo dado. El procedimiento para hacer esto está señalado en el problema 5.

PROBLEMAS

1. Mostrar que si $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ son soluciones de la Ec. (3), entonces $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t)$ es también una solución para cualesquiera constantes $c_1, \ldots, c_k$.

2. En este problema delineamos una prueba del Teorema 6.5 en el caso $n = 2$. Sean $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ soluciones de la Ec. (3) para $\alpha < t < \beta$ y sea W el Wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$.

a) Mostrar que

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{dx_1^{(1)}}{dt} & \dfrac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \dfrac{dx_2^{(1)}}{dt} & \dfrac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

b) Usando la Ec. (3) mostrar que

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W.$$

c) Encontrar $W(t)$ resolviendo la ecuación diferencial obtenida en la parte *b*). Use esta expresión para obtener la conclusión establecida en el Teorema 6.5.

d) Generalice este procedimiento con el fin de probar el Teorema 6.5 para un valor arbitrario de n.

3. Mostrar que los Wronskianos de dos conjuntos fundamentales de soluciones del sistema (3) pueden diferir a lo más por una constante multiplicativa.
Sugerencia: Use la Ec. (14).

4. Si $x_1 = y$ y $x_2 = y'$, entonces la ecuación de segundo orden

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{i}$$

corresponde al sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{aligned} \tag{ii}$$

Mostrar que si $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son un conjunto fundamental de soluciones de las Ecs. (ii), y si y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones de la Ec. (i), entonces $W(y_1, y_2) = cW(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ donde c es una constante diferente de cero.
Sugerencia: $y_1(t)$ y $y_2(t)$ deben ser combinaciones lineales de $x_{11}(t)$ y $x_{12}(t)$.

5. En este problema indicaremos cómo puede usarse el método de variación de parámetros para resolver sistemas nohomogéneos de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Supóngase que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}(t)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(2)}(t)$ son soluciones linealmente independientes del sistema de segundo orden

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}. \tag{i}$$

Entonces, la solución general de la Ec. (i) es $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$ donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

a) Resolver el sistema nohomogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \tag{ii}$$

suponiendo que

$$\mathbf{x} = u_1(t)\mathbf{x}^{(1)}(t) + u_2(t)\mathbf{x}^{(2)}(t), \tag{iii}$$

donde u_1 y u_2 son funciones escalares que deben determinarse. Substituyendo la $\mathbf{x}$ de la Ec. (ii) en la Ec. (iii), mostrar que

$$u_1'(t)\mathbf{x}^{(1)}(t) + u_2'(t)\mathbf{x}^{(2)}(t) = \mathbf{g}(t). \tag{iv}$$

b) Mostrar que la Ec. (iv) puede resolverse para $u'_1(t)$ y $u'_2(t)$.

c) Encontrar fórmulas para $u_1(t)$ y $u_2(t)$ y a partir de ellas resolver la ecuación nohomogénea (ii).

6. Considérense los vectores $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese el Wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$.

b) ¿En qué intervalos $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son linealmente independientes?

c) ¿Qué conclusión se puede obtener acerca de los coeficientes en el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas satisfechos por $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$?

d) Encuéntrese este sistema de ecuaciones y verifique sus conclusiones de la parte *b*).

7. Considérense los vectores $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, y responda a las mismas preguntas que en el caso del problema 6.

Los siguientes dos problemas indican una deducción alternativa del Teorema 6.4.

8. Sean $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ sobre el intervalo $\alpha < t < \beta$. Supóngase que $\mathbf{P}$ es continuo y sea t_0 un punto arbitrario en el intervalo dado. Mostrar que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ son linealmente dependientes para $\alpha < t < \beta$ si y sólo si $\mathbf{x}^{(1)}(t_0), \ldots, \mathbf{x}^{(m)}(t_0)$ son linealmente dependientes. En otras palabras, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ son linealmente dependientes sobre el intervalo (α, β) si son linealmente dependientes en cualquier punto de él.
Sugerencia: Hay constantes $c_1, \ldots, c_m$ tales que $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t_0) = \mathbf{0}$.
Sea $\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t)$, y úsese el Teorema de unicidad para mostrar que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ para cada t en $\alpha < t < \beta$.

9. Sean $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ soluciones linealmente independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, donde la matriz $n \times n$, $\mathbf{P}$ es continua sobre $\alpha < t < \beta$.

a) Mostrar que cualquier solución $\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$ puede escribirse en la forma

$$\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

para constantes adecuadas $c_1, \ldots, c_n$.
Sugerencia: Use el resultado del problema 12 de la sección 6.3, y también el problema 8 anterior.

b) Muéstrese que la expresión para la solución $\mathbf{z}(t)$ en la parte *a*) es única; esto es, si $\mathbf{z}(t) = k_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + k_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$, entonces $k_1 = c_1, \ldots, k_n = c_n$.
Sugerencia: Muestre que $(k_1 - c_1)\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + (k_n - c_n)\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}$ para cada t en $\alpha < t < \beta$ y use la independencia lineal de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$.

6.5 SISTEMAS HOMOGENEOS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

En esta sección principiaremos a mostrar cómo construir la solución general de un sistema de ecuaciones homogéneas lineales con coeficientes constantes, esto es, un sistema de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{A}$ es una constante* (matriz $n \times n$ constante). Antes de tratar el problema en toda su generalidad, exhibiremos algunas de las ideas que se manejan en el ejemplo siguiente:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2, \\ x_2' &= 4x_1 + x_2, \end{aligned} \tag{2}$$

ó

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{3}$$

* El procedimiento descrito aquí se aplica ya sea que $\mathbf{A}$ tenga valores reales o complejos. Sin embargo, consideraremos solamente sistemas con coeficientes reales en ejemplos y problemas, y el lector puede pensar siempre que $\mathbf{A}$ es real.

Este sistema fue resuelto en la sección 6.2 por el método de eliminación, pero ahora consideraremos un proceso alternativo.

Por analogía con el tratamiento de las ecuaciones de segundo orden lineales en la sección 3.5, buscaremos soluciones de la Ec. (3) de la forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}, \tag{4}$$

donde deben determinarse r y el vector constante $\boldsymbol{\xi}$. Substituyendo $\mathbf{x}$ de la Ec. (4) en el sistema (3) se obtiene inmediatamente

$$r\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi},$$

o en forma escalar

$$\begin{aligned} (1-r)\xi_1 + \quad\quad \xi_2 &= 0, \\ 4\xi_1 + (1-r)\xi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Las Ecs. (5) tienen una solución no trivial si y sólo si el determinante de los coeficientes se anula. De aquí que

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = r^2 - 2r - 3 = 0 \tag{6}$$

es la condición que determina los valores permitidos de r. La Ec. (6) se llama la ecuación auxiliar para el sistema (3), y sus raíces son $r_1 = 3$, $r_2 = -1$. Para $r_1 = 3$, las Ecs. (5) tienen la solución $\boldsymbol{\xi}$ definida por $\boldsymbol{\xi}^T = (c_1, 2c_1) = c_1(1, 2)$, donde c_1 es una constante arbitraria; una solución correspondiente $\mathbf{x}^{(1)}$ de la ecuación diferencial (3) está dada por

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}. \tag{7}$$

Similarmente, para $r_2 = -1$, $\boldsymbol{\xi}^T = (c_2, -2c_2) = c_2(1, -2)$, donde c_2 es también arbitraria; de aquí que una segunda solución del sistema sea

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{8}$$

Obtenemos por superposición la solución general

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \tag{9}$$

que es la misma que la que se encontró en la sección 6.2. El lector deberá notar que las raíces $r_1 = 3$ y $r_2 = -1$ son los eigenvalores del coeficiente matricial del sistema (3); los vectores correspondientes $\boldsymbol{\xi}$ son los eigenvectores asociados.

Puede aplicarse también el mismo procedimiento al sistema general

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{10}$$

donde $\mathbf{A}$ es cualquier matriz $n \times n$ constante. Suponiendo que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt} \tag{11}$$

y substituyendo $\mathbf{x}$ en la Ec. (10), obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \tag{12}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. Una vez más, las soluciones no triviales de las ecuaciones algebraicas (12), existen si y sólo si se elige r de tal forma de hacer cero el determinante de los coeficientes, esto es, si r es una raíz de la *ecuación auxiliar*

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{13}$$

Estos valores de r son precisamente los eigenvalores de la matriz $\mathbf{A}$. La Ec. (13) es una ecuación polinomial en r de grado n, y por lo tanto hay n eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$ algunos de los cuales, sin embargo, pueden ser repetidos. Consideraremos inmediatamente después el caso en el que todos los eigenvalores son diferentes. En la sección siguiente discutiremos el caso en el que hay eigenvalores repetidos, y también la posibilidad de encontrar soluciones reales cuando los eigenvalores son complejos.

Si todos los eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$ son diferentes, entonces, correspondiendo a cada r_k la Ec. (12) determina (hasta una constante multiplicativa arbitraria), el eigenvector correspondiente $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$. De aquí que las soluciones correspondientes del sistema diferencial (10) sean

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n t}. \tag{14}$$

El Wronskiano de esta solución es

$$W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})(t) = \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} \cdots \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} \cdots \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + \cdots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} \cdots \xi_1^{(n)} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \xi_n^{(1)} \cdots \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Como se indicó en la sección 6.3, los eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ son linealmente independientes, y por lo tanto el determinante en la Ec. (15) no es cero. Ya que la función exponencial nunca es cero, se concluye de la Ec. (15) que $W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})$ no se anula, y por lo tanto que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. En otras palabras, cuando las raíces de la Ec. (13) son todas diferentes, la solución general del sistema (10) es

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t} + \cdots + c_n \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n t}. \tag{16}$$

Ejemplo. Encontrar la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{17}$$

Suponiendo que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$, obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} (1-r)\xi_1 \quad - \xi_2 \quad &= 0 \\ \xi_1 + (2-r)\xi_2 + \quad \xi_3 &= 0 \\ -2\xi_1 + \quad \xi_2 + (-1-r)\xi_3 &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

cuyo determinante de los coeficientes es

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 & 0 \\ 1 & 2-r & 1 \\ -2 & 1 & -1-r \end{vmatrix} = -(1-r)(2-r)(1+r). \tag{19}$$

Por lo tanto, los valores permitidos de r son $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, y $r_3 = -1$. Correspondiendo a cada uno de estos valores de r, las Ecs. (18) tienen una solución que está determinada sólo hasta una constante multiplicativa arbitraria. Eligiendo esta constante en cada caso, de tal forma que la primera componente es uno, obtenemos

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

La solución general del sistema (17) es entonces

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2t} + c_3\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{r_3t} \tag{21}$$

ó

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}e^{-t}. \tag{22}$$

Nótese que aun para un sistema de tres ecuaciones, los cálculos algebraicos requeridos pueden ser complicados, particularmente aquéllos involucrados en la factorización del polinomio del determinante $\Delta(r)$. Este ejemplo se seleccionó de tal forma que los cálculos fueran simples, y por lo tanto no es muy típico a este respecto.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 6 encuéntrese la solución general del sistema de ecuaciones dado

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

En cada uno de los problemas 7 a 10 resuélvase el problema de valores iniciales.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

11. El sistema $t\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es análogo a la ecuación de Euler de segundo orden (sección 4.4). Suponiendo que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}t^r$, donde $\boldsymbol{\xi}$ es un vector constante, mostrar que $\boldsymbol{\xi}$ y r deben satisfacer $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$; mostrar también que para obtener soluciones no triviales de la ecuación diferencial dada, r debe ser una raíz de la ecuación auxiliar $(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$.

De acuerdo con el problema 11, resolver el sistema dado de ecuaciones en cada uno de los problemas 12 a 15. Suponer $t > 0$.

12. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

13. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

14. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

15. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

En cada uno de los problemas 16 y 17, encuéntrese la solución general del sistema nohomogéneo dado de ecuaciones diferenciales. Referirse al problema 5 de la sección 6.4.

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$

6.6 EIGENVALORES COMPLEJOS Y REPETIDOS

Consideraremos otra vez un sistema de n ecuaciones homogéneas lineales con coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1}$$

En la última sección mostramos que si los eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$ de la matriz $\mathbf{A}$ son todos diferentes, y si los eigenvectores correspondientes son $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$, entonces la Ec. (1) tiene un conjunto fundamental de soluciones de la forma

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}. \tag{2}$$

Si cualquiera de los eigenvalores es complejo, digamos $r = r_1$, entonces la solución correspondiente $\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}$ es de valores complejos. En este caso puede ser deseable (como en los capítulos 3 y 5) encontrar otro conjunto fundamental de soluciones, todas las cuales sean de valores reales. Además, si $\mathbf{A}$ tiene un eigenvalor repetido de multiplicidad m, entonces puede suceder que correspondiendo a este eigenvalor haya solamente q eigenvectores linealmente independientes, donde $q < m$; de aquí que puede ser imposible encontrar n soluciones independientes de la Ec. (1) de la forma (2). En este caso es necesario buscar otras soluciones, de forma diferente, para determinar un conjunto fundamental de soluciones. Estos dos asuntos se discutirán inmediatamente.

Eigenvalores Complejos. Recordemos que los eigenvalores $r_1, \ldots, r_n$ de la matriz $\mathbf{A}$ son las raíces de la ecuación

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \tag{3}$$

y que los eigenvectores correspondientes satisfacen

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Si $\mathbf{A}$ es real, entonces los coeficientes en la ecuación polinomial (3) para r son reales, y cualesquiera eigenvalores complejos deberán encontrarse en pares conjugados. Por ejemplo, si $r_1 = \lambda + i\mu$ donde λ y μ son reales, es un eigenvalor de $\mathbf{A}$, entonces tendremos que $r_2 = \lambda - i\mu$. Además, los eigenvectores correspondientes $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ son también complejos conjugados. Para ver que esto es así, supóngase que r_1 y $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ satisfacen

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Al tomar el complejo conjugado de esta ecuación, y notar que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$ son de valores reales, obtenemos

$$(\mathbf{A} - \bar{r}_1\mathbf{I})\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

donde $\bar{r}_1$ y $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ son los complejos conjugados de r_1 y $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ respectivamente. En otras palabras, $r_2 = \bar{r}_1$ es también un eigenvalor, y $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ es el eigenvector correspondiente. Las soluciones correspondientes

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}e^{\bar{r}_1 t} \tag{7}$$

de la ecuación diferencial (1) son entonces complejas conjugadas una de la otra. Por lo tanto, por una extensión del Teorema 3.9 a sistemas (lo que se puede hacer fácilmente), podemos encontrar dos soluciones de valores reales de la Ec. (1) que corresponden a los eigenvalores r_1 y r_2, tomando las partes reales e imaginarias de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ o $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ dadas por la Ec. (7). Queremos enfatizar que esto se aplica solamente si el coeficiente matricial $\mathbf{A}$ es real, porque es sólo entonces cuando los eigenvalores complejos deben encontrarse en pares conjugados.

Ejemplo 1. Encuéntrese un conjunto fundamental de soluciones de valores reales del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{8}$$

Suponiendo que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt} \tag{9}$$

conduce al conjunto de ecuaciones algebraicas lineales

$$\begin{aligned} (1 - r)\xi_1 - \qquad \xi_2 &= 0, \\ 5\xi_1 - (3 + r)\xi_2 &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

que determina los eigenvalores y eigenvectores de $\mathbf{A}$. La ecuación auxiliar es

$$\begin{vmatrix} 1 - r & -1 \\ 5 & -(3 + r) \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 2 = 0; \tag{11}$$

por lo tanto los eigenvalores son $r_1 = -1 + i$ y $r_2 = -1 - i$, y de la Ec. (10) los eigenvectores correspondientes son

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + i \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Por lo tanto, un conjunto fundamental de soluciones del sistema (8) es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - i \end{pmatrix}e^{(-1+i)t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + i \end{pmatrix}e^{(-1-i)t}. \tag{13}$$

Para obtener un conjunto de soluciones de valores reales, debemos encontrar las partes reales e imaginarias de, ya sea $\mathbf{x}^{(1)}$ o $\mathbf{x}^{(2)}$. De hecho,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t), \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \mathbf{u}(t) - i\mathbf{v}(t), \tag{14}$$

donde

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Al calcular el Wronskiano de $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$, encontramos que $W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -e^{-2t}$ que nunca es cero. Por lo tanto, $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones de valores reales del sistema (8).

Eigenvalores Repetidos. Concluiremos nuestra consideración del sistema (1) con una discusión del caso en el que la matriz $\mathbf{A}$ tiene un eigenvalor repetido. Si $r = \rho$ es un eigenvalor de $\mathbf{A}$ con multiplicidad k, entonces hay dos posibilidades: o hay k eigenvectores linealmente independientes correspondientes al eigenvalor ρ, o hay menos de k de tales eigenvectores. En el primer caso, sean $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(k)}$ los eigenvectores asociados con el valor propio ρ. Entonces $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho t}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(k)}e^{\rho t}$ son k soluciones linealmente independientes de la Ec. (1). Por lo tanto en este caso no significa ninguna diferencia el que el eigenvalor $r = \rho$ esté repetido; hay aun un complemento total de soluciones de la Ec. (1) de la forma $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Esto está ilustrado por el ejemplo 2.

Ejemplo 2. Encontrar un conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{16}$$

Suponiendo que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$, obtenemos el conjunto de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} (3 - r)\xi_1 + 2\xi_2 \qquad &+ 4\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 - r\xi_2 \qquad &+ 2\xi_3 = 0, \\ 4\xi_1 + 2\xi_2 + (3 - r)\xi_3 &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

La ecuación auxiliar es

$$r^3 - 6r^2 - 15r - 8 = (r + 1)^2(r - 8) = 0;$$

de aquí que los eigenvalores de la matriz de coeficientes sean $r_1 = r_2 = -1$, $r_3 = 8$. Para el eigenvalor repetido $r = -1$ el sistema de ecuaciones algebraicas (17) se reduce a

$$2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0; \tag{18}$$

cualquier vector $\boldsymbol{\xi}$ que esté en el plano dado por la Ec. (18) es un eigenvector correspondiente. Por lo tanto hay dos eigenvectores independientes asociados con el eigenvalor $r = -1$. Por ejemplo, si $\xi_1 = 1$ y $\xi_2 = 0$, entonces $\xi_3 = -1$ y un eigenvector es

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, si $\xi_1 = 0$ y $\xi_2 = 1$, obtenemos el eigenvector $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ dado por

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cualquier otro vector en el plano (18) es una combinación lineal de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Las soluciones correspondientes del sistema de ecuaciones diferenciales (16) son

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}. \tag{19}$$

Finalmente, para el eigenvalor $r_3 = 8$, obtenemos el eigenvector

$$\boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y de aquí que la tercera solución independiente del sistema (16) sea

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{8t}. \tag{20}$$

Mencionamos en la sección 6.3 que una gran cantidad de problemas que surgen en aplicaciones conducen a coeficientes matriciales para los que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$; tales matrices se dice que son hermitianas, o autoadjuntas. En este evento, es posible mostrar (justamente como en el ejemplo 2) que si hay un eigenvalor repetido, de multiplicidad k digamos, entonces siempre hay un conjunto completo de k eigenvectores linealmente independientes que le corresponden. Como se indicó antes, éstos conducen a k soluciones independientes del sistema (1), y no se requiere más análisis.

Sin embargo, si el coeficiente matricial no es hermitiano, entonces puede haber menos de k eigenvectores independientes, correspondiendo a un eigenvalor de multiplicidad k, y si esto ocurre, habrá menos de k soluciones de la Ec. (1) de la forma $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ asociadas con este eigenvalor. Por lo tanto, para construir un conjunto fundamental de soluciones de la Ec. (1), es necesario encontrar otras soluciones de una forma diferente. Por analogía con los resultados previos para ecuaciones lineales de orden n, es natural buscar soluciones adicionales que involucren productos de polinomios y funciones exponenciales. Ilustraremos el procedimiento por medio del ejemplo siguiente.

Ejemplo 3. Encontrar un conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{21}$$

Suponiendo que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$ y substituyendo $\mathbf{x}$ en la Ec. (21) se tiene

$$\begin{aligned}(1-r)\xi_1 - \qquad \xi_2 &= 0,\\ \xi_1 + (3-r)\xi_2 &= 0,\end{aligned} \tag{22}$$

de lo cual se concluye que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son $r_1 = r_2 = 2$. Para este valor r, las Ecs. (22) implican que $\xi_1 + \xi_2 = 0$. Por lo tanto hay solamente un eigenvector $\boldsymbol{\xi}$, dado por $\boldsymbol{\xi}^T = (1, -1)$ correspondiente al eigenvalor doble. De aquí que una solución del sistema (21) sea

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \tag{23}$$

pero no hay segunda solución de la forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Es natural tratar de encontrar una segunda solución del sistema (21) de la forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}te^{2t}, \tag{24}$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ es un vector constante. Substituyendo $\mathbf{x}$ en la Ec. (21) nos da

$$2\boldsymbol{\eta}te^{2t} + \boldsymbol{\eta}e^{2t} - \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}te^{2t} = \mathbf{0}. \tag{25}$$

Para que la Ec. (25) se satisfaga para toda t se necesita que los coeficientes de te^{2t} y e^{2t} sean cada uno de ellos cero. Del término e^{2t} encontramos que

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}. \tag{26}$$

Por lo tanto no hay una solución diferente de cero del sistema (21) de la forma (24).

Ya que la Ec. (25) contiene términos tanto en te^{2t} como en e^{2t} aparece que además de $\boldsymbol{\eta}te^{2t}$ la segunda solución deberá contener un término de la forma $\boldsymbol{\zeta}e^{2t}$; en otras palabras, necesitamos suponer que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}te^{2t} + \boldsymbol{\zeta}e^{2t}, \tag{27}$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\zeta}$ son vectores constantes. Después de substituir esta expresión para $\mathbf{x}$ en la Ec. (21) obtenemos

$$2\boldsymbol{\eta}te^{2t} + (\boldsymbol{\eta} + 2\boldsymbol{\zeta})e^{2t} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}te^{2t} + \boldsymbol{\zeta}e^{2t}). \tag{28}$$

Igualando coeficientes de e^{2t} y te^{2t} en cada lado de la Ec. (28) se obtienen las condiciones

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \tag{29}$$

y

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} \tag{30}$$

para la determinación de $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\zeta}$. La Ec. (29) se satisface si $\boldsymbol{\eta}$ es el eigenvector de $\mathbf{A}$ correspondiente al valor propio $r = 2$, esto es, $\boldsymbol{\eta}^T = (1, -1)$. Ya que $\det(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ es cero, podemos esperar que la Ec. (30) no pueda resolverse. Sin embargo, por cálculo directo podemos mostrar que el eigenvector $\boldsymbol{\eta}$ satisface la condición $(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}) = 0$, para cada solución $\mathbf{y}$ de $(\mathbf{A}^* - 2\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Esta es precisamente la condición bajo la cual la Ec. (30) tiene soluciones; ver la sección 6.3 y el problema 23. La solución de la Ec. (30) no es única ya que puede incluirse un múltiplo arbitrario de $\boldsymbol{\eta}$. Al resolver la Ec. (30) encontramos que

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

donde k es una constante arbitraria. Substituyendo $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\zeta}$ en la Ec. (27) obtenemos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{32}$$

El último término en la Ec. (32) es meramente un múltiplo de la primera solución $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, y puede ignorarse, pero los primeros dos términos constituyen una nueva solución $\mathbf{x}^{(2)}(t)$,

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{33}$$

Un cálculo elemental muestra que $W(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})(t) = e^{-4t}$, y por lo tanto $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema (21). La solución general es

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)\\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}\right].\end{aligned} \tag{34}$$

Una diferencia entre un sistema de dos ecuaciones de primer orden y una sola ecuación de segundo orden es evidente del ejemplo 3. Recordemos que, para una ecuación lineal de segundo orden con una raíz repetida r_1 de la ecuación auxiliar, no se requiere un término $ce^{r_1 t}$ en la segunda solución, ya que es un múltiplo de la primera solución. Por otra parte, para un sistema de dos ecuaciones de primer orden, el término $\boldsymbol{\zeta}e^{r_1 t}$ no es múltiplo de la primera solución, a menos que $\boldsymbol{\zeta}$ sea proporcional al eigenvector asociado con el eigenvalor r_1. Ya que éste no es el caso, generalmente, se debe conservar el término $\boldsymbol{\zeta}e^{r_1 t}$.

Puede aplicarse el mismo procedimiento en problemas más generales. Considérese otra vez el sistema (1), y supóngase que $r = \rho$ es un eigenvalor doble de $\mathbf{A}$, pero que hay solamente un eigenvector correspondiente $\boldsymbol{\xi}$. Entonces una solución [similar a la Ec. (23)] es

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}e^{\rho t}, \tag{35}$$

donde $\boldsymbol{\xi}$ satisface

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{36}$$

Procediendo como en el ejemplo, encontramos que una segunda solución [similar a la Ec. (33)] es

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi} te^{\rho t} + \boldsymbol{\eta} e^{\rho t}, \tag{37}$$

donde $\boldsymbol{\xi}$ satisface la Ec. (36) y $\boldsymbol{\eta}$ se determina a partir de

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}. \tag{38}$$

Si $r = \rho$ es un eigenvalor de la matriz $\mathbf{A}$ de multiplicidad mayor que dos, entonces hay una mayor variedad de posibilidades. Podemos ilustrar esto considerando un eigenvalor de multiplicidad tres. Supóngase primero que $r = \rho$ es un eigenvalor triple de $\mathbf{A}$ con un *solo* eigenvector correspondiente $\boldsymbol{\xi}$. Entonces la primera solución está dada por la Ec. (35), una segunda solución por la Ec. (37), y una tercera solución es de la forma

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \boldsymbol{\xi}\frac{t^2}{2!}e^{\rho t} + \boldsymbol{\eta} te^{\rho t} + \boldsymbol{\zeta} e^{\rho t}, \tag{39}$$

donde $\boldsymbol{\xi}$ satisface la Ec. (36), $\boldsymbol{\eta}$ satisface la Ec. (38), y $\boldsymbol{\zeta}$ se determina a partir de

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta}. \tag{40}$$

Una segunda posibilidad es que haya *dos* eigenvectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ correspondiendo al eigenvalor $r = \rho$. Entonces, dos soluciones del sistema (1) son

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\rho t}. \tag{41}$$

Una tercera solución viene a ser

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \boldsymbol{\xi} te^{\rho t} + \boldsymbol{\eta} e^{\rho t}. \tag{42}$$

En la Ec. (42) $\boldsymbol{\xi}$ es una cierta combinación lineal de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ determinada de tal forma que la ecuación

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \tag{43}$$

sea soluble. Para esta elección de $\boldsymbol{\xi}$, el vector $\boldsymbol{\eta}$ se encuentra entonces resolviendo la Ec. (43). La última posibilidad es que el eigenvalor triple $r = \rho$ tenga tres eigenvectores correspondientes $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, y $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$. En este caso las soluciones son simplemente

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\rho t}, \qquad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{\rho t}. \tag{44}$$

Finalmente, notamos que un tratamiento general de problemas con eigenvalores repetidos es posible, pero involucra tópicos avanzados de la teoría matricial que están más allá del alcance de este libro.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 6, exprese la solución general del sistema de ecuaciones dado en términos solamente de funciones de valores reales.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

En cada uno de los problemas 7 a 10 encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dado.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

En cada uno de los problemas 11 a 14 encuentre la solución del problema de valores iniciales dado

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$

En cada uno de los problemas 15 a 17 encuentre la solución general del sistema nohomogéneo de ecuaciones diferenciales dado. Refiérase al problema 5 de la sección 6.4.

15. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \qquad t > 0$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cot t \end{pmatrix}, \qquad 0 < t < \pi$

En cada uno de los problemas 18 a 21 resuelva el sistema de ecuaciones por el método del problema 11 de la sección 6.5. Supóngase que $t > 0$.

18. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

19. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

20. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

21. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

22. Mostrar que $r = 2$ es una raíz triple de la ecuación auxiliar para el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x},$$

y encuéntrense tres soluciones linealmente independientes de este sistema.

23. Considérese el problema ejemplificado en el texto,

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

con el eigenvector $\boldsymbol{\xi}$ dado por $\boldsymbol{\xi}^T = (1, -1)$ correspondiendo al eigenvalor $r = 2$. Encuéntrense todas las soluciones de $(\mathbf{A}^* - 2\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0}$, y muéstrese directamente que $\boldsymbol{\xi}$ es ortogonal a cada una de ellas.

REFERENCIAS

Los libros listados en seguida son representativos de muchos libros introductorios recientes sobre matrices y álgebra lineal.

Cullen, C.G., *Matrices and Linear Transformations*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

Schneider, H. y Barker, G.P., *Matrices and Linear Algebra*, Holt, Rinehart, Mass., and Winston, Nueva York, 1968.

Shields, P.C., *Elementary Linear Algebra*, Worth, Nueva York, 1968.

Stewart, F.M., *Introduction to Linear Algebra*, van Nostrand, Princeton, N.J., 1963.

Zelinsky, D., *A First Course in Linear Algebra*, Academic Press, Nueva York, 1968.

Capítulo 7

Métodos Numéricos

7.1 INTRODUCCION

En este capítulo consideraremos métodos numéricos por medio de los cuales podemos construir en forma de tabla, la solución de una ecuación diferencial dada y sus condiciones iniciales. Por ejemplo, una tabla de valores de e^x, que es la solución del problema de valores iniciales

$$y' - y = 0, \qquad y(0) = 1,$$

representaría una solución numérica de este problema. Consideraremos principalmente la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

con la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Supondremos también que las funciones f y f_y son continuas en algún rectángulo en el plano xy que incluye al punto (x_0, y_0) tal que, de acuerdo con el Teorema 2.2, existe una solución, única $y = \phi(x)$ del problema dado en algún intervalo alrededor de x_0. Como enfatizamos en la sección 2.3, si la Ec. (1) es no lineal, el intervalo alrededor de x_0 en el que existe la solución ϕ puede ser difícil de determinar, y puede que no haya ninguna relación simple para la función f. En toda nuestra discusión de la Ec. (1) supondremos que la única solución que satisface la condición inicial (2) existe sobre el intervalo de interés.

En algunos casos $f(x, y)$ es tan simple que la Ec. (1) puede integrarse directamente. Sin embargo, en muchos problemas de ciencia o ingeniería éste no es el caso, y es natural considerar procedimientos numéricos para obtener una solución aproximada del problema. Aun si la Ec. (1) puede integrarse directamente, puede ser más difícil calcular la solución analítica que resolver el problema de valores iniciales original numéricamente. Por ejemplo, la so-

lución analítica puede estar en forma de una relación implícita complicada $F(x, y) = 0$. No obstante no se debe menospreciar la importancia de los métodos analíticos. Ellos nos dan información muy importante acerca de la existencia, unicidad, y comportamiento cualitativo de las soluciones.

Se entiende por un proceso numérico para resolver el problema de valores iniciales dado por las Ecs. (1) y (2), un procedimiento para construir valores aproximados $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ de la solución ϕ en los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$; ver figura 7.1. Más precisamente, tal procedimiento numérico es llamado *método de variables discretas* ya que estamos reemplazando un problema que involucra variables continuas, por otro que involucra variables discretas.

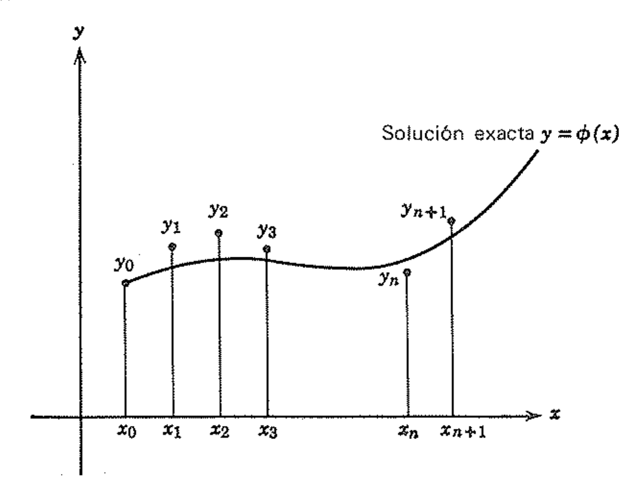


FIGURA 7.1

Nuestro primer propósito es determinar y_1, conociendo y_0 de las condiciones iniciales y $\phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$ de la ecuación diferencial (1). Habiendo conocido y_1 determinamos y_2 y así sucesivamente. Para determinar y_2 podemos usar el mismo método que seguimos para ir de x_0 a x_1 o podemos usar un método diferente que tome en cuenta que conocemos tanto y_0 en x_0 como y_1 en x_1.

En general, los métodos que requieren sólo el conocimiento de y_n para determinar y_{n+1} se conocen como de *un paso*, o *métodos de partida*. Los métodos que hacen uso de más datos que el punto previo, digamos y_n, y_{n-1}, y_{n-2} para determinar y_{n+1} se conocen como métodos de *muchos pasos* o *métodos de continuación*. Claramente, si un método de continuación que involucra a y_n y y_{n-1} se usa, debemos usar un método de partida (de aquí el nombre de método de partida) en el primer paso para determinar y_1; el método de continuación puede usarse entonces para determinar y_2 y las sucesivas. Por otra parte, puede usarse un método de partida para todos los cálculos. Nosotros limitaremos nuestra discusión a varios métodos de un solo paso para resolver el problema de valores iniciales (1) y (2) y el error asociado con tales métodos.

Con el advenimiento de las computadoras electrónicas digitales de alta velocidad, que pueden hacer cientos o miles de cálculos por segundo, se ha hecho muy importante el uso de los métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales. Muchos problemas que no había esperanza de resolver analíticamente, y que requerirían años para resolverse por cálculo manual, pueden resolverse ahora en cosa de minutos* usando computadoras de alta velocidad. Por otra parte, no todas las preguntas que pueden hacerse sobre la resolución de ecuaciones diferenciales pueden resolverse usando métodos numéricos. Por ejemplo, puede ser difícil resolver preguntas tales como saber en qué forma una solución depende de y_0 (lo cual es de interés a menudo) o de otro de los parámetros del problema. Tales preguntas serían mucho más simples si se conociera la solución analítica del problema.

Más aún, los métodos numéricos dan lugar a preguntas serias provenientes de sus propias características. En primer lugar, está la cuestión de la convergencia. Esto es, cuando la distancia entre los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tiende a cero, ¿tienden los valores de la solución numérica $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ a la solución exacta? Está también el asunto de estimar el error que se comete al calcular los valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Este error tiene generalmente dos fuentes: primero, la fórmula usada en el método numérico es solamente una fórmula aproximada, lo cual da lugar a un *error de fórmula*, o *error por truncamiento*; y segundo, es posible hacer los cálculos solamente con un número limitado de dígitos, lo cual causa un *error de redondeo*. En las secciones 7.3 y 7.7 discutiremos brevemente el significado de los errores de fórmula y de redondeo.

La notación que usaremos a través de este capítulo es como sigue. La solución exacta del problema de valores iniciales dado por las Ecs. (1) y (2) será denotada por ϕ (o $y = \phi(x)$); entonces el valor de la solución exacta en x_n es $\phi(x_n)$. Para un procedimiento numérico dado, los símbolos y_n y $y'_n = f(x_n, y_n)$ denotarán los valores aproximados de la solución exacta y su derivada en el punto x_n. Claramente, $\phi(x_0) = y_0$, pero en general $\phi(x_n) \neq y_n$ para $n \geq 1$. Similarmente $\phi'(x_0) = y'_0$, pero en general $\phi'(x_n) = f[x_n, \phi(x_n)]$ no es igual a $y'_n = f(x_n, y_n)$ para $n \geq 1$. Además, en toda la discusión usaremos un espaciamiento uniforme o tamaño de paso h sobre el eje x. De aquí que $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$ y en general $x_n = x_0 + nh$.

Finalmente, deseamos llamar la atención del lector sobre el punto siguiente. El primer problema al final de las secciones 7.2 hasta 7.6 trata del mismo problema de valores iniciales, y lo mismo sucede con los problemas segundo y tercero. Usando uno de estos problemas para el trabajo práctico, es posible comparar la exactitud y la cantidad de trabajo que requieren los diferentes procedimientos numéricos.

* Esto es, el cálculo en sí puede requerir sólo unos cuantos minutos, pero se puede necesitar mucho más tiempo, quizá semanas o aun meses, el preparar el problema para el cálculo. El tiempo de preparación depende fuertemente de que éste sea el *primer* problema que se va a resolver, o de que, por ejemplo, caiga dentro de una clase de problemas para los que ya existe un programa de cálculo.

7.2 EL METODO DE EULER O METODO DE LA LINEA TANGENTE

Uno de los métodos de un solo paso más simples para resolver el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

numéricamente, es el método de la línea tangente, que fue usado primero por Euler. Ya que se conocen x_0 y y_0, se conoce también la pendiente de la línea tangente a la solución en $x = x_0$, esto es $\phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$ se conoce. Por lo tanto podemos construir la tangente a la solución en x_0 y obtener entonces un valor aproximado y_1 de $\phi(x_1)$ moviéndonos a lo largo de la tangente hacia x_1; ver figura 7.2. De aquí que

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \phi'(x_0)(x_1 - x_0) \\ &= y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0). \end{aligned} \tag{2}$$

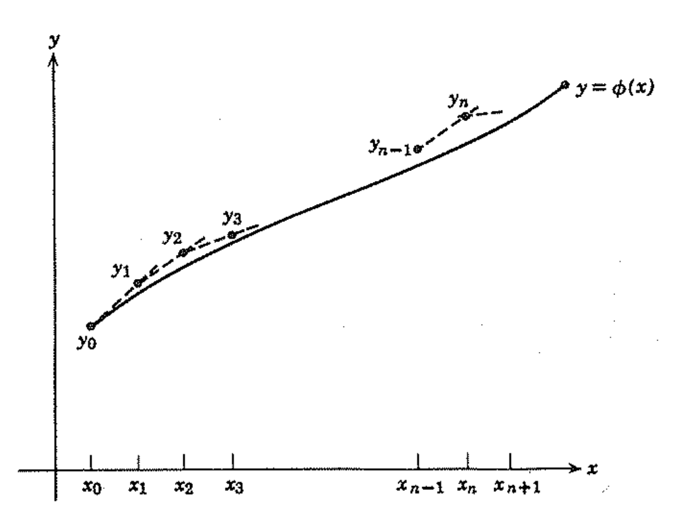


FIGURA 7.2

Una vez que se determinó y_1 podemos calcular $y'_1 = f(x_1, y_1)$ que es un valor aproximado de $\phi'(x_1) = f[x_1, \phi(x_1)]$, la pendiente de la tangente a la verdadera solución en x_1. Usando esta pendiente obtenemos

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + y_1'(x_2 - x_1) \\ &= y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

y en general

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Si suponemos que hay un tamaño de paso h uniforme entre los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots$, entonces $x_{n+1} = x_n + h$ y obtenemos la fórmula de Euler

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ &= y_n + hy_n', \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{3}$$

La fórmula de Euler es muy simple de usarse, y al discutir la aplicación de la fórmula es posible ilustrar muchas de las ideas importantes que son comunes a los métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales. Por otra parte, esta fórmula no es, en general, exacta. Antes de discutir la fórmula de Euler y los métodos para mejorarla, ilustraremos primero cómo puede usarse este resultado para resolver el problema de valores iniciales

$$y' = 1 - x + 4y, \tag{4}$$

$$y(0) = 1. \tag{5}$$

Este ejemplo será usado a todo lo largo del resto del capítulo para ilustrar y comparar diferentes métodos numéricos. Aunque éste es un problema muy simple, sirve para ilustrar la mejoría que puede ganarse usando procedimientos numéricos más cuidadosos, y haciendo más pequeños los pasos h en la variable independiente. La Ec. (4) es una ecuación lineal de primer orden, y se puede verificar fácilmente que la solución que satisface la condición inicial (5) es

$$y = \phi(x) = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{16} + \tfrac{19}{16}e^{4x}. \tag{6}$$

Ejemplo. Usando la fórmula de Euler (3) y el tamaño de paso $h = 0.1$, determínese un valor aproximado de la solución $y = \phi(x)$ en $x = 0.2$ para el ejemplo ilustrativo $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$.

Calculamos primero $y'_0 = f(0, 1) = 5$; de aquí que

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(0, 1) \\ &= 1 + (0.1)5 = 1.5. \end{aligned}$$

En seguida

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &= 1.5 + (0.1)f(0.1, 1.5) \\ &= 1.5 + (0.1)(1 - 0.1 + 6) \\ &= 2.19. \end{aligned}$$

Este resultado deberá compararse con el valor exacto, que es $\phi(0.2) = 2.5053299$ correcto hasta ocho dígitos. El error es aproximadamente $2.51 - 2.19 = 0.32$.

Normalmente, un error de este tamaño (o error porcentual del 12%) no es aceptable.* Puede obtenerse un resultado mejor usando un tamaño de paso

* Para que el estudiante no se desanime, enfatizamos otra vez que hemos hecho el propósito de elegir un ejemplo que ilustrará la mejoría que se obtiene al usar procedimientos más precisos y/o tamaños de paso más pequeños h. Por otra parte, el ejemplo aquí presentado es extraordinariamente simple comparado con los que se pueden encontrar en la práctica. En general, los procedimientos más precisos se usan para construir soluciones numéricas de problemas de valores iniciales en ingeniería, física, y otros campos de aplicaciones.

más pequeño. De aquí que cuando $h = 0.05$ y tomando cuatro pasos para llegar a $x = 0.2$, obtenemos el valor aproximado de 2.3249 para $\phi(0.2)$ con un error porcentual de 8%. Un tamaño de paso $h = 0.025$ conduce a un valor de 2.4080117 con un error porcentual de 4%. Alternativamente podemos usar procedimientos más minuciosos que darán resultados satisfactorios sin usar un tamaño de paso muy pequeño. Por ejemplo, si se usa el método de Runge-Kutta que está discutido en la sección 7.6, con $h = 0.1$, se obtiene el valor aproximado de 2.5050062 para $\phi(0.2)$. Este resultado coincide con la solución exacta en las primeras cuatro cifras. Estos puntos están discutidos con más detalle en las secciones siguientes. En esta sección estamos interesados primordialmente en desarrollar cierta familiaridad con la técnica de usar un procedimiento numérico para resolver un problema de valores iniciales.

Al llevar a cabo los cálculos en cualquier procedimiento numérico es aconsejable construir una tabla para registrar, de una manera sistemática, los resultados necesarios. Llevando a cabo los cálculos de una manera sistemática, se reduce el peligro de cometer errores y, si se hacen errores después de todo, se hace más fácil localizarlos y corregirlos. Además, si la tabla se construye correctamente, la rutina de llenar ciertos pasos puede dejarse a una persona que no sepa nada de ecuaciones diferenciales. Sería más lógico usar una computadora electrónica de alta velocidad. En este caso haríamos un diagrama de flujo, y escribiríamos después un programa para instruir a la máquina la forma cómo deben realizarse los cálculos.

Para este problema podemos construir la tabla 7.1, donde trabajamos de izquierda a derecha a lo largo de los renglones. El estudiante deberá comprobar la tabla cuidadosamente de tal forma que esté satisfecho de ella y pueda calcular y_6, y_7 de una manera directa. En la tabla 7.1 las dos últimas columnas contienen los valores de la solución exacta ϕ correcta hasta ocho dígitos y las diferencias $\phi(x_n) - y_n$. Deberá ser evidente de estos resultados, que para el presente problema el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 0.1$ es insatisfactorio.

Un diagrama de flujo para el método de Euler para resolver el problema de valores iniciales (1) para $x_0 \le x \le x_0 + Nh$ se muestra en la figura 7.3. Nótese que en el diagrama de flujo la segunda caja representa el cálculo de $f(x_n, y_n)$ para x_n y y_n dados. La primera vez que se toca la caja tenemos $x_n = x_0$ y $y_n = y_0$. En los cálculos subsecuentes los valores de x_n y y_n son determinados en la tercera caja entrando en la segunda hasta que $x_n = x_0 + Nh$. Cuando esto sucede el cálculo se para.

Para concluir esta sección apuntaremos dos métodos alternativos para deducir la fórmula de Euler (3) los cuales sugerirán métodos para obtener mejores fórmulas y también nos ayudarán en nuestro estudio del error usando la fórmula (3)

Primero, ya que $y = \phi(x)$ es una solución del problema de valores iniciales (1), al integrar de x_n a x_{n+1} obtenemos

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi'(x)\,dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f[x, \phi(x)]\,dx$$

ó

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f[x, \phi(x)]\,dx. \qquad (7)$$

TABLA 7.1 Solución Numérica de $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$ Usando el Método de Euler con $h = 0.1$

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = 1 - x_n + 4y_n$	$hf(x_n, y_n)$	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$	$\phi(x_{n+1})$	$\phi(x_{n+1}) - y_{n+1}$
0	0	1.0	5	0.5	1.5	1.6090418	0.1090418
1	0.1	1.5	6.9	0.69	2.19	2.5053299	0.3153299
2	0.2	2.19	9.56	0.956	3.146	3.8301388	0.6841388
3	0.3	3.146	13.284	1.3284	4.4744	5.7942260	1.3198260
4	0.4	4.4744	18.4976	1.84976	6.32416	8.7120041	2.3878441
5	0.5	6.32416				13.052522	
6	0.6					19.515518	
7	0.7						

Leer h, N, x_0, y_0
$x_0 \rightarrow x_n$
$y_0 \rightarrow y_n$

Calcular
$y_n' = f(x_n, y_n)$

$x_n + h \rightarrow x_n$
$y_n + hy_n' \rightarrow y_n$
Registro x_n, y_n

$x_n \geq x_0 + Nh$ — No

Sí

ALTO

FIGURA 7.3 Diagrama de Flujo. (M. de Euler.)

Si aproximamos la integral en la Ec. (7) reemplazando $f[x, \phi(x)]$ por su valor $f[x_n, \phi(x_n)]$ en $x = x_n$, como se indica en la figura 7.4, obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(x_{n+1}) &\cong \phi(x_n) + f[x_n, \phi(x_n)](x_{n+1} - x_n) \\ &= \phi(x_n) + hf[x_n, \phi(x_n)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Finalmente, para obtener una aproximación y_{n+1} para $\phi(x_{n+1})$ hacemos una segunda aproximación para reemplazar $\phi(x_n)$ por su valor aproximado y_n en la Ec. (8).

Esto da la fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Una fórmula más precisa puede obtenerse evaluando la integral más precisamente. Esto se discute en la sección 7.4.

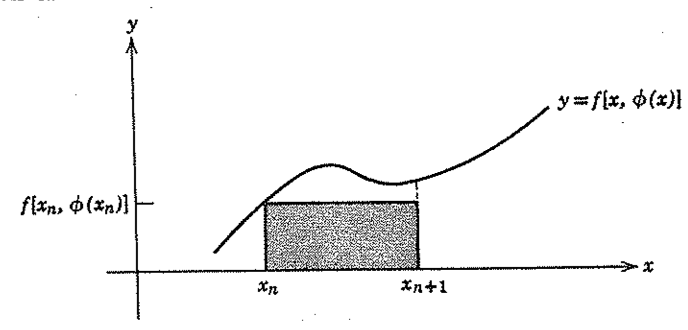


FIGURA 7.4

Segundo, suponiendo que damos por sentado que la solución $y = \phi(x)$ tiene una serie de Taylor alrededor del punto x_n. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(x_n + h) &= \phi(x_n) + \phi'(x_n)h + \phi''(x_n)\frac{h^2}{2!} + \cdots \\ &= \phi(x_n) + f[x_n, \phi(x_n)]h + \phi''(x_n)\frac{h^2}{2!} + \cdots . \end{aligned} \tag{9}$$

Si la serie se termina después de los primeros dos términos, y $\phi(x_{n+1})$ y $\phi(x_n)$ son reemplazados por sus valores aproximados y_{n+1} y y_n, obtenemos otra vez la fórmula de Euler (3). Si se retienen más términos en la serie, se puede obtener una fórmula más precisa. Esto está discutido en la sección 7.5. Además, usando una serie de Taylor con un residuo, es posible estimar la magnitud del error en la fórmula. Esto está discutido en la sección siguiente.

PROBLEMAS

En todas las computadoras, a menos de que se especifique otra cosa, se retienen cuatro dígitos a partir del primer dígito no cero. De aquí que, por ejemplo, el número 1.6846 *se redondea a* 1.685 *antes de seguir la computación. Si el quinto dígito es 5 o más, redondéelo.*

1. Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = 2y - 1, \qquad y(0) = 1.$$

a) Determínese la solución $y = \phi(x)$ y evalúese $\phi(x)$ en $x = 0.1, 0.2, 0.3$ y 0.4.

b) Constrúyase una tabla para determinar y_n usando la fórmula de Euler (3). Tómese $h = 0.1$ y determine valores aproximados de $\phi(0.1)$, $\phi(0.2)$, $\phi(0.3)$ y $\phi(0.4)$. Compare sus resultados con los valores exactos.

c) Tómese $h = 0.05$ y determínense los valores aproximados de $\phi(0.05)$, $\phi(0.1)$, $\phi(0.15)$ y $\phi(0.2)$. Compare sus resultados con los resultados de la parte *b*) y los valores exactos. Las diferencias en los resultados para $h = 0.1$ y $h = 0.05$ tienden a indicar si $h = 0.1$ es satisfactoria, o si debe usarse un tamaño de paso menor para este rango de x.

2. Háganse las partes *a*), *b*) y *c*) del problema 1 para el problema de valores iniciales

$$y' = \tfrac{1}{2} - x + 2y, \qquad y(0) = 1.$$

3. Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 1.$$

La solución $y = \phi(x)$ de este problema de valores iniciales no puede expresarse en términos de funciones elementales, por lo tanto, el uso de procedimientos numéricos en este caso es más importante.

a) Constrúyase una tabla para determinar y_n usando la fórmula de Euler (3). Tómese $h = 0.1$, y determínense valores aproximados de $\phi(0.1)$, $\phi(0.2)$, $\phi(0.3)$ y $\phi(0.4)$.

b) Tómese $h = 0.05$ y determínense valores aproximados de $\phi(0.05)$, $\phi(0.1)$, $\phi(0.15)$ y $\phi(0.2)$. Las diferencias en los resultados para $h = 0.1$ y $h = 0.05$ tienden a indicar si es satisfactoria la aproximación $h = 0.1$, o si debe usarse un tamaño de paso menor para este rango de x.

4. Complétense los renglones correspondientes a $n = 5$ y $n = 6$ en la tabla 7.1.

5. Usando tres términos del desarrollo en serie de Taylor dado en la Ec. (9), y tomando $h = 0.1$, determínense valores aproximados de la solución del ejemplo ilustrativo $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$ en $x = 0.1$ y 0.2. Compárense sus resultados con los que se usaron en el método de Euler y los valores exactos.
Sugerencia: Si $y' = f(x, y)$, ¿cuál es y''? (Ver la sección 7.5.)

*6. Puede mostrarse que bajo condiciones adecuadas sobre f, la solución numérica generada por el método de Euler para el problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ converge a la solución exacta cuando el tamaño del paso h decrece. Esto está ilustrado por el siguiente ejemplo. Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = 1 - x + y, \qquad y(x_0) = y_0.$$

a) Mostrar que la solución exacta es $y = \phi(x) = (y_0 - x_0)e^{(x-x_0)} + x$.
b) Mostrar, usando la fórmula de Euler que

$$y_k = (1 + h)y_{k-1} + h - hx_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

c) Notando que $y_1 = (1 + h)(y_0 - x_0) + x_1$ y usando el método de inducción, mostrar que

$$y_n = (1 + h)^n(y_0 - x_0) + x_n.$$

d) Considérese un punto fijo $x > x_0$, y para una n dada elíjase $h = (x - x_0)/n$. Entonces para cualquier n, $x_n = x$. Substituyendo para h en la fórmula precedente y dejando que $n \to \infty$ se obtiene el resultado deseado. Nótese que $h \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Sugerencia: $\lim_{n\to\infty} (1 + a/n)^n = e^a$.

*7. Usando la técnica discutida en el problema 6, muéstrese que la solución aproximada obtenida por el método de Euler converge a la solución exacta en cualquier punto fijo cuando $h \to 0$ para cada uno de los siguientes problemas.

a) $y' = y, \quad y(0) = 1$

b) $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$ *Indicación:* $y_1 = (1 + 2h)/2 + 1/2$

c) $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$ *Indicación:* $y_1 = (1 + 2h) + x_1/2$

8. Un procedimiento alternativo para la construcción de la solución $y = \phi(x)$ del problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ es usar el método de *iteración*. Integrando la ecuación diferencial de x_0 a x nos da

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \phi(t)]\, dt. \qquad \text{(i)}$$

Si, en el miembro derecho de la Ec. (i), se reemplaza $\phi(t)$ por una función particular, la integral puede evaluarse y puede obtenerse una nueva función ϕ. Esto sugiere el procedimiento de iteración

$$\phi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \phi_n(t)]\, dt.$$

Este es el tipo de iteración que es usado para establecer la existencia de una solución para el problema de valores iniciales dado bajo condiciones iniciales sobre $f(x, y)$. Esto fue discutido en detalle en la sección 2.11. Para calcular realmente $\phi(x)$ este procedimiento es poco usado ya que puede ser difícil, si no imposible, evaluar la integral de $f[t, \phi_n(t)]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Tomando $\phi_0(x) = 1$ determínese $\phi_3(x)$ para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales. También calcúlese $\phi_2(0.4)$ y $\phi_3(0.4)$ y compárese con los resultados obtenidos usando el método de Euler.

a) $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$

c) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1;$ calcular solamente $\phi_2(x)$

7.3 EL ERROR

Como se mencionó en la introducción a este capítulo, hay dos fuentes fundamentales de error al resolver el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

por un procedimiento numérico tal como el método de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad x_n = x_0 + nh. \qquad (2)$$

Vamos a suponer primero que nuestro equipo de cálculo es tal que podemos llevar a cabo todos los cálculos con una completa precisión, esto es, que podemos retener un número infinito de cifras decimales. La diferencia entre la solución exacta $y = \phi(x)$ y la solución aproximada del problema de valores iniciales (1)

$$E_n = \phi(x_n) - y_n, \qquad (3)$$

se conoce como fórmula de error, o la *fórmula del error acumulado.* Surge para dos causas: (i) en cada paso usamos una fórmula aproximada para determinar y_{n+1}; (ii) los datos de entrada en cada paso no están de acuerdo con la solución exacta, ya que en general $\phi(x_k)$ no es igual a y_k. Si suponemos que los datos de entrada son correctos, el único error al ir de un paso al otro es el debido al uso de una fórmula aproximada, y es conocido como el *error de fórmula local* e_n.

En la práctica, debido a las limitaciones del equipo de computación, es imposible en general calcular y_{n+1} exactamente de la fórmula dada. Por lo tanto tenemos un error de redondeo debido a la falta de precisión en el cálculo. Por ejemplo, si se usa una máquina computadora que puede usar

solamente ocho dígitos, y y_0 es 1.01735824, los últimos dos dígitos deberán ser redondeados, lo que inmediatamente introduce un error en el cálculo de y_1. Alternativamente, si $f(x, y)$ debe involucrar funciones tales como el logaritmo o la exponencial tendríamos un error de redondeo al llevar a cabo estas operaciones. Justamente como para la fórmula del error, es posible hablar de un error local de redondeo y del error acumulado por redondeo. El *error acumulado por redondeo* R_n está definido como

$$R_n = y_n - Y_n, \tag{4}$$

donde Y_n es el valor *realmente computado* por el procedimiento numérico dado, por ejemplo la fórmula de Euler (2).

El valor absoluto del error total al computar $\phi(x_n)$ está dado por

$$|\phi(x_n) - Y_n| = |\phi(x_n) - y_n + y_n - Y_n|. \tag{5}$$

Haciendo uso de la desigualdad del triángulo, $|a + b| \leq |a| + |b|$, obtenemos de la Ec. (5)

$$\begin{aligned} |\phi(x_n) - Y_n| &\leq |\phi(x_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \\ &\leq |E_n| + |R_n|. \end{aligned} \tag{6}$$

Por lo tanto, el error total está limitado por la suma de los valores absolutos de los errores de fórmula y redondeo. Para los procedimientos numéricos discutidos en este libro es posible obtener estimaciones útiles del error de fórmula. Sin embargo, nosotros limitaremos nuestra discusión principalmente al error local de fórmula, que es algo más simple. La naturaleza del error de redondeo depende claramente más del azar. Depende del tipo de máquina computadora que se use, de la secuencia en que se lleven a cabo los cálculos, del método de redondeo, etc. Mientras que un análisis del error por redondeo está más allá del alcance de este libro, es posible decir más acerca de él de lo que podríamos esperar. Ver por ejemplo Henrici. Algunos de los peligros debidos al error por redondeo son discutidos en los problemas 10, 11, 12 y 13 en la sección 7.7.

Error Local de Fórmula para el Método de Euler. Vamos a suponer que la solución $y = \phi(x)$ del problema de valores iniciales (1) tiene una segunda derivada continua en el intervalo de interés. Esta suposición es equivalente a dar por sentado que f, f_x, y f_y son continuas en la región de interés. Si f tiene estas propiedades y si ϕ es la solución del problema de valores iniciales (1), entonces

$$\phi'(x) = f[x, \phi(x)],$$

y por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= f_x[x, \phi(x)] + f_y[x, \phi(x)]\phi'(x) \\ &= f_x[x, \phi(x)] + f_y[x, \phi(x)]f[x, \phi(x)]. \end{aligned} \tag{7}$$

Ya que el miembro derecho de esta ecuación es continuo, ϕ'' es también continuo.

Entonces, haciendo uso de una serie de Taylor con un residuo para desarrollar ϕ alrededor de x_n, obtenemos

$$\phi(x_n + h) = \phi(x_n) + \phi'(x_n)h + \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{x}_n)h^2, \tag{8}$$

donde $\bar{x}_n$ es algún punto en el intervalo $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$. Restando la Ec. (2) de la Ec. (8), y notando que $\phi(x_n + h) = \phi(x_{n+1})$ y $\phi'(x_n) = f[x_n, \phi(x_n)]$ dan

$$\phi(x_{n+1}) - y_{n+1} = [\phi(x_n) - y_n] + h\{f[x_n, \phi(x_n)] - f(x_n, y_n)\} + \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{x}_n)h^2. \tag{9}$$

Para calcular el error local de fórmula supondremos que los datos en el enésimo paso son correctos, esto es, $y_n = \phi(x_n)$. Entonces obtenemos inmediatamente de la Ec. (9) que el error local de fórmula e_{n+1} es

$$e_{n+1} = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1} = \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{x}_n)h^2. \tag{10}$$

Por lo tanto, el error local de fórmula para el método de Euler es proporcional al cuadrado del tamaño de paso h y la segunda derivada de ϕ. Para el intervalo fijo $a = x_0 \leq x \leq b$, el valor absoluto del error de fórmula local para cualquier paso está acotado por $Mh^2/2$ depende M es el máximo de $|\phi''(x)|$ sobre $a \leq x \leq b$. La primera dificultad al estimar el error de fórmula local es el de obtener una estimación precisa de M. Sin embargo, se debe notar que M es independiente de h; por lo tanto, reduciendo h por un factor de $\frac{1}{2}$, se reduce el error límite por un factor de 1/4, y una reducción por un factor de 1/10 en h reduce el error límite por un factor de 1/100.

Más importante que el error local de fórmula es el error acumulado de fórmula E_n. No obstante, una estimación del error local de fórmula da un mejor entendimiento del procedimiento numérico, y nos sirve para comparar la precisión de diferentes procedimientos numéricos. El análisis para estimar E_n es más difícil que para e_n. Sin embargo, conociendo el error local de fórmula podemos hacer una estimación *intuitiva* del error acumulado de fórmula en un $\bar{x} > x_0$ fijo como sigue. Supóngase que tomamos n pasos al ir de x_0 a $\bar{x} = x_0 + nh$. En cada paso el error es a lo más $Mh^2/2$; entonces el error en n pasos es a lo más $nMh^2/2$. Nótese que $n = (\bar{x} - x_0)/h$, y entonces encontramos que el error acumulado de fórmula para el método de Euler al ir de x_0 a $\bar{x}$ está acotado por

$$n\frac{Mh^2}{2} = (\bar{x} - x_0)\frac{Mh}{2}. \tag{11}$$

Aunque este argumento no es correcto, se muestra en el problema 5, que sobre cualquier intervalo finito, el error de fórmula acumulado usando el método de Euler no es mayor que una constante multiplicada por h. Por lo tanto, al ir de x_0 a un punto fijo $\bar{x}$, el error acumulado de fórmula puede reducirse haciendo más pequeño h. Desafortunadamente éste no es el final de la historia. Si h se hace demasiado pequeño, esto es, se necesitan demasiados pasos para ir de x_0 a $\bar{x}$, el error acumulado de redondeo se puede hacer más importante que el error acumulado de fórmula. En la práctica se deben

considerar ambas fuentes de error y se debe hacer una elección óptima de h que no sea ni demasiado grande ni demasiado chica. Esto está discutido después en la sección 7.7. Un procedimiento práctico para estimar el error acumulado de fórmula, que requiere un cálculo con dos diferentes tamaños de paso, está discutido en los problemas 6 y 8.

Un ejemplo de cómo podemos usar el resultado (10) si tenemos información *a priori* acerca de la solución del problema de valores iniciales dado, puede considerarse con el ejemplo siguiente ilustrativo

$$y' = 1 - x + 4y, \qquad y(0) = 1 \tag{12}$$

sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Sea $y = \phi(x)$ la solución del problema de valores iniciales (12). Entonces $\phi'(x) = 1 - x + 4\phi(x)$, y

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= -1 + 4\phi'(x)\\ &= -1 + 4[1 - x + 4\phi(x)]\\ &= 3 - 4x + 16\phi(x).\end{aligned}$$

De la Ec. (10)

$$e_{n+1} = \frac{3 - 4\bar{x}_n + 16\phi(\bar{x}_n)}{2}\,h^2, \qquad x_n < \bar{x}_n < x_n + h. \tag{13}$$

Notando que $|3 - 4\bar{x}_n| \leq 3$ sobre $0 \leq x \leq 1$, una cota no muy precisa para e_{n+1} está dada por

$$e_{n+1} \leq \left[\tfrac{3}{2} + 8 \max_{0 \leq x \leq 1} |\phi(x)|\right] h^2. \tag{14}$$

Ya que el miembro derecho de la Ec. (14) no depende de n, esto da una cota, uniforme aunque no necesariamente precisa, del error en cualquier paso, si se conoce una cota para $|\phi(x)|$ sobre $0 \leq x \leq 1$. Para el presente problema, $\phi(x) = (4x - 3 + 19e^{4x})/16$. Substituyendo $\phi(\bar{x}_n)$ en la Ec. (13) da

$$e_{n+1} = 19e^{4\bar{x}_n}h^2/2, \qquad x_n < \bar{x}_n < x_n + h. \tag{15}$$

La aparición del factor 19 y el rápido crecimiento de e^{4x}(en $x = 1$, $e^{4x} = 54.598$) explican por qué los resultados de la sección previa, con $h = 0.1$ no fueron muy precisos. Por ejemplo, el error en el primer paso es

$$e_1 = \phi(x_1) - y_1 = \frac{19e^{4\bar{x}_0}(0.01)}{2}, \qquad 0 < \bar{x}_0 < 0.1.$$

Es claro que e_1 es positivo y que, ya que $e^{4\bar{x}_0} < e^{0.4}$, tenemos

$$e_1 \leq \frac{19e^{0.4}(0.01)}{2} \cong 0.142. \tag{16}$$

Nótese también que $e^{4\bar{x}_0} > 1$; de aquí que $e_1 \geq 19(0.01)/2 = 0.095$. El error real es 0.1090418. Nótese también de la Ec. (15), que el error se hace peor progresivamente con el aumento de x; esto se muestra claramente por los resultados en la tabla 7.1 de la última sección. Un cálculo similar de una cota para el error local de fórmula en ir de 0.4 a 0.5 da

$$0.47 \cong \frac{19e^{1.6}(0.01)}{2} \leq e_5 \leq \frac{19e^{2}(0.01)}{2} \cong 0.7.$$

En la práctica, por supuesto, no conoceremos la solución ϕ del problema de valores iniciales dado. Sin embargo, si tenemos cotas sobre las funciones f, f_x y f_y podemos obtener una cota sobre $|\phi''(x)|$, aunque no necesariamente una muy precisa, de la Ec. (7). Puede usarse entonces la Ec. (10) para estimar el error local de fórmula. Aun si no podemos encontrar una cota útil para $|\phi''(x)|$, sabemos que para el método de Euler el error local de fórmula y el error acumulado de fórmula están acotados por una constante multiplicada por h^2 y una constante multiplicada por h, respectivamente.

Concluimos esta sección con dos comentarios prácticos que están basados en la experiencia.

1. Una forma de estimar si es suficientemente pequeño el error de fórmula es, después de completar los cálculos con una h dada, repetirlos usando el tamaño de paso $h/2$. (Ver problemas 6 y 8.) Si los cambios son mayores que los que podemos aceptar, entonces es necesario usar un tamaño de paso más pequeño o un procedimiento numérico más preciso o posiblemente ambos. En las secciones siguientes se discuten procedimientos más precisos. Los resultados* para el ejemplo ilustrativo usando el método de Euler con diferentes tamaños de paso están dados en la tabla 7.2. Estos resultados muestran que aun con $h = 0.01$ no es posible obtener los tres primeros dígitos correctamente en $x = 0.10$. Esto podría esperarse sin conocer la solución exacta, ya que en $x = 0.1$ los resultados para $h = 0.025$ y $h = 0.01$ difieren en el tercer dígito.

TABLA 7.2 Una Comparación de Resultados para la Solución Numérica de $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$. Usando el Método de Euler para Diferentes Tamaños de Peso h.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.01$	Exacto
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5000000	1.5475000	1.5761188	1.5952901	1.6090418
0.2	2.1900000	2.3249000	2.4080117	2.4644587	2.5053299
0.3	3.1460000	3.4333560	3.6143837	3.7390345	3.8301388
0.4	4.4744000	5.0185326	5.3690304	5.6137120	5.7942260
0.5	6.3241600	7.2901870	7.9264062	8.3766865	8.7120041
0.6	8.9038240	10.550369	11.659058	12.454558	13.052522
0.7	12.505354	15.234032	17.112430	18.478797	19.515518
0.8	17.537495	21.967506	25.085110	27.384136	29.144880
0.9	24.572493	31.652708	36.746308	40.554208	43.497903
1	34.411490	45.588400	53.807866	60.037126	64.897803

* En la tabla 7.2, así como en todas las otras de este capítulo, excepto las de la sección 7.7, se llevaron a cabo todos los cálculos con una computadora IBM 1410, usando doce dígitos. Las respuestas fueron redondeadas a ocho dígitos.

2. Es posible estimar el efecto del error por redondeo después de completar los cálculos, usando un cierto número de dígitos y repitiendo los cálculos considerando uno o dos dígitos más. Otra vez, si los cambios son más de lo que podemos aceptar, es necesario retener más dígitos en los cálculos. Algunos ejemplos de las dificultades que surgen debido a errores de redondeo se discuten en los problemas 10 a 13.

PROBLEMAS

En los problemas 1 y 2 estímese el error local de fórmula en términos de la solución exacta $y = \phi(x)$ si se usa el método de Euler. Obtener una cota para e_{n+1} en términos de x y $\phi(x)$ que sea válida sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Usando la solución exacta obténgase una cota más precisa del error e_{n+1}. Para $h = 0.1$ calcúlese una cota para e_1 y compárese con el error real en $x = 0.1$. Compútese también una cota para el error e_4 en el cuarto paso.

1. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$

2. $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$

3. Obténgase una fórmula para el error local de fórmula en término de x y la solución exacta ϕ si se usa el método de Euler para el problema de valores iniciales

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 1.$$

4. Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = \cos 5\pi x, \qquad y(0) = 1.$$

a) Determine la solución exacta $y = \phi(x)$, y trace una gráfica de $y = \phi(x) - 1$ para $0 \leq x \leq 1$. Use una escala para la ordenada tal que $1/5\pi$ es alrededor de una pulgada.

b) Determine valores aproximados de $\phi(x)$ en $x = 0.2$, 0.4 y 0.6 usando el método de Euler con $h = 0.2$. Trace una gráfica de línea quebrada para la solución aproximada, y compare con la gráfica de la solución exacta.

c) Repita los cálculos de la parte *b*) para $0 \leq x \leq 0.4$, pero tome $h = 0.1$.

d) Muestre, calculando el error local de fórmula, que ninguno de estos tamaños de paso es suficientemente pequeño. Determine un valor de h que asegure que el error local de fórmula es menor que 0.05 a todo lo largo del intervalo $0 \leq x \leq 1$. Que un valor tan pequeño de h se requiere resulta del hecho que el máx de $|\phi''(x)|$ es grande; o, puesto en términos burdos, que la solución es altamente oscilatoria.

*5. En este problema discutiremos el error acumulado de fórmula asociado con el método de Euler para el problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Suponiendo que las funciones f y f_y son continuas en una región R del plano xy que incluye al punto (x_0, y_0) se puede mostrar que existe una constante L tal que $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| < L|y - \tilde{y}|$ donde (x, y) y $(x, \tilde{y})$ son dos puntos cualesquiera en R con la misma coordenada x. (Ver el problema 3 de la sección 2.11.) Además supondremos que f_x es continua de tal forma que la solución ϕ tiene una segunda derivada continua.

a) Usando la Ec. (9) mostrar que

$$|E_{n+1}| \leq |E_n| + h\,|f[x_n, \phi(x_n)] - f(x_n, y_n)| + \tfrac{1}{2}h^2\,|\phi''(\bar{x}_n)| \leq \alpha\,|E_n| + \beta h^2, \qquad \text{(i)}$$

donde $\alpha = 1 + hL$ y $\beta = \text{máx}\,|\phi''(x)|/2$ sobre $x_0 \leq x \leq x_n$.

b) Aceptando sin prueba que si $E_0 = 0$, y si $|E_n|$ satisface la Ec. (i), entonces $|E_n| \leq \beta h^2 (\alpha^n - 1)/(\alpha - 1)$ para $\alpha \neq 1$, mostrar que

$$|E_n| \leq \frac{(1 + hL)^n - 1}{L}\,\beta h. \qquad \text{(ii)}$$

La ecuación (ii) da una cota para $|E_n|$ en términos de h, L, n, y β. Nótese que para una h fija, esta cota de error aumenta cuando lo hace n; esto es, que la cota del error aumenta con la distancia al punto de partida x_0.

c) Mostrar que $(1 + hL)^n \leq e^{nhL}$, y por lo tanto que

$$|E_n| \leq \frac{e^{nhL} - 1}{L}\,\beta h$$
$$\leq \frac{e^{(x_n - x_0)L} - 1}{L}\,\beta h.$$

Para un punto fijo $\bar{x} = x_0 + nh$ (esto es, nh es constante y $h = (\bar{x} - x_0)/n$) esta cota del error es de la forma una constante multiplicada por h y que tiende a cero cuando $h \to 0$. También nótese que para $nhL = (\bar{x} - x_0)L$ pequeño, el miembro derecho de la ecuación anterior es aproximadamente $nh^2\beta = (\bar{x} - x_0)\beta h$ lo que fue obtenido en la Ec. (11) por un argumento intuitivo.

6. Sea $y = \phi(x)$ la solución del problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Como se discutió en el texto (ver también la parte *c*) del problema 5), el error acumulado de fórmula usando el método de Euler para ir de x_0 a un punto fijo $\bar{x} = x_0 + nh$ es proporcional a nh^2. Entonces $\phi(\bar{x}) = y_n(h) + C_1 nh^2$, donde C_1 es una constante desconocida. La dependencia de y_n de h está indicada escribiendo $y_n(h)$. Supóngase en seguida que el cálculo se repite usando un tamaño de paso $h/2$. Ya que ahora se requieren $2n$ pasos para llegar a $\bar{x}$, tenemos $\phi(\bar{x}) = y_{2n}(h/2) + C_2(2n)(h/2)^2$. En general C_1 y C_2 serán diferentes, pero para h pequeña esta diferencia es pequeña; y supondremos que es permisible hacer $C_2 = C_1$. Resolviendo para los nC_1 términos de $y_n(h)$, $y_{2n}(h/2)$, y h, y substituyendo entonces para nC_2 en la segunda ecuación, muestre que

$$\phi(\bar{x}) \cong y_{2n}(h/2) + [y_{2n}(h/2) - y_n(h)].$$

La cantidad entre paréntesis es una corrección al resultado usando un tamaño de paso $h/2$, y por lo tanto nos da la *estimación del error*.

Substituyendo nC_1 en la primera ecuación se obtiene una estimación del error usando un tamaño de paso h. Este procedimiento para calcular una nueva aproximación a $\phi(\bar{x})$ en términos de $y_n(h)$ y $y_{2n}(h/2)$ se conoce a menudo como la aproximación diferida al límite de Richardson.

7. Usando la técnica discutida en el problema 6 determínense nuevas estimaciones para el valor de la solución exacta $y = \phi(x)$ en $x = 0.2$, haciendo uso de los resultados para $h = 0.2$ y $h = 0.1$ con el método de Euler, para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales. Cuando esto sea posible, compare sus resultados con los valores de la solución exacta en $x = 0.2$.

a) $y' = 2y, \quad y(0) = 1$ *b*) $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$

c) $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$ *d*) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$

8. Un método numérico, se dice que tiene una precisión de orden r si el error en $x_n = x_0 + nh$ es proporcional a nh^{r+1}. Por lo tanto el método de Euler tiene una precisión de primer orden, ya que $r = 1$. Siguiendo el procedimiento del problema 6, mostrar que para un método con una precisión de orden r, una aproximación al error en $y_{2n}(h/2)$ está dado por $[y_{2n}(h/2) - y_n(h)]/(2^r - 1)$. Si el primer dígito afectado por esta cantidad es el k-ésimo, es razonable esperar que el resultado sea correcto hasta $k - 1$ dígitos.

9. Considérese el ejemplo problema $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$. Siguiendo el método de Richardson (problemas 6 y 8), y usando los valores aproximados de $\phi(1)$ para $h = 0.1$, 0.05, y 0.025 que están dados en la tabla 7.2, obténganse nuevas estimaciones para $\phi(1)$ para

a) $h = 0.1$ y $h = 0.05$ *b*) $h = 0.05$ y $h = 0.025$

Compare sus resultados con el valor de la solución exacta.

10. Usando un tamaño de paso $h = 0.05$ y el método de Euler, pero haciendo todos los cálculos con sólo tres dígitos, determine valores aproximados de la solución exacta en $x = 0.05$, 0.1, 0.15 y 0.2 para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales.

a) $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$

c) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$

Compare sus resultados con aquellos que se obtienen usando cuatro dígitos y que fueron obtenidos en la sección anterior. Las diferencias pequeñas entre algunos de aquellos resultados redondeados a tres dígitos y los resultados presentes son debidas a errores por redondeo. El error por redondeo se hace más importante si el cálculo requiere muchos pasos.

11. El siguiente problema ilustra un peligro que se encuentra debido al error por redondeo cuando se restan números muy parecidos, y la diferencia se multiplica por un número grande. Evaluar la cantidad

$$1000 \cdot \begin{vmatrix} 6.010 & 18.04 \\ 2.004 & 6.000 \end{vmatrix}$$

como sigue.

a) Redondee primero cada número en el determinante a dos dígitos.

b) Redondee primero cada número en el determinante a tres dígitos.

c) Retenga todos los cuatro dígitos. Compare el valor exacto con los resultados de las partes *a*) y *b*).

12. La ley distributiva $a(b - c) = ab - ac$ no vale, en general, si los productos se redondean a un número pequeño de dígitos. Para mostrar esto en un caso específico tómese $a = 0.22$, $b = 3.19$ y $c = 2.17$. Después de cada multiplicación redondéese el último dígito.

13. Para obtener una idea de los posibles peligros de los pequeños errores en las condiciones iniciales, tales como aquellos debidos al redondeo, considérese el problema de valores iniciales

$$y' = x + y - 3, \qquad y(0) = 2.$$

a) Mostrar que la solución exacta es $y = \phi_1(x) = 2 - x$.

b) Supóngase que se comete un error en la condición inicial y que se usa 2.001 en lugar de 2. Determínese la solución $y = \phi_2(x)$ en este caso, y compárese la diferencia $\phi_2(x) - \phi_1(x)$ en $x = 1$ y cuando $x \to \infty$.

7.4 EL METODO DE EULER PERFECCIONADO

Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Suponiendo que ϕ es la solución exacta del problema de valores iniciales (1), e integrando de x_n a x_{n+1} como se hizo en la Ec. (7) de la sección 7.2, obtenemos

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f[x, \phi(x)]\, dx. \tag{2}$$

La fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{3}$$

se obtuvo reemplazando $f[x, \phi(x)]$ en la Ec. (2) por su valor aproximado $f(x_n, y_n)$ en el extremo izquierdo.

Se puede obtener una fórmula más precisa si el integrando de la Ec. (2) se aproxima por el promedio de sus valores en los dos extremos, $\{f[x_n, \phi(x_n)] + f[x_{n+1}, \phi(x_{n+1})]\}/2$; ver la figura 7.5. Además, reemplazamos $\phi(x_n)$ y $\phi(x_{n+1})$ por sus valores aproximados y_n y y_{n+1}. Obtenemos entonces de la Ec. (2)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2} h \tag{4}$$

Ya que la incógnita y_{n+1} aparece como uno de los argumentos de f en el miembro derecho de la Ec. (4), en general será bastante difícil resolver esta ecuación para y_{n+1}. Esta dificultad puede sobreponerse reemplazando y_{n+1} en

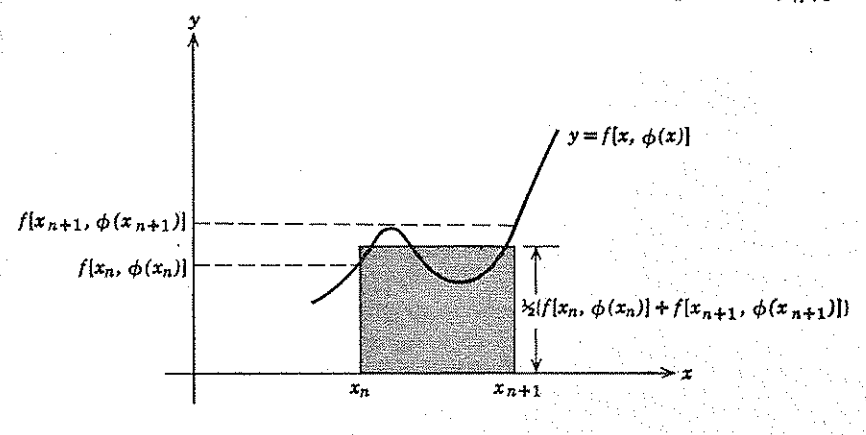


FIGURA 7.5

TABLA 7.3 Solución Numérica de $y' = 1 - x + 4y, y(0) = 1$ Usando el Método de Euler Perfeccionado con $h = 0.1$

Instrucciones de la Tabla	A	B	$C = 1 - A + 4B$	$D = A + 0.1$	$E = B + 0.1C$	$F = 1 - D + 4E$	$G = C + F$	$H = (0.05)G$	$I = B + H$	
n	x_n	y_n	$y'_n = f(x_n, y_n)$	$x_n + h$	$y_n + hy'_n$	$f[x_n + h, y_n + hy'_n]$			y_{n+1}	$\phi(x_{n+1})$
0	0	1	5	0.1	1.5	6.9	11.9	0.595	1.595	1.6090418
1	0.1	1.595	7.280	0.2	2.323	10.092	17.372	0.8686	2.4636	2.5053299
2	0.2	2.4636	10.6544	0.3	3.52904	14.81616	25.47056	1.273528	3.737128	3.8301388
3	0.3									5.7942260
4	0.4									8.7120041
5										
6										

el miembro derecho de la Ec. (2) por el valor obtenido usando la fórmula simple de Euler (3). De aquí que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f[x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)]}{2} h$$

$$= y_n + \frac{y'_n + f[x_n + h, y_n + hy'_n]}{2} h, \tag{5}$$

donde x_{n+1} se ha reemplazado por $x_n + h$.

La Ec. (5) da una fórmula para calcular y_{n+1}, el valor aproximado de $\phi(x_{n+1})$ en términos de los datos en x_n. Esta fórmula se conoce como la *fórmula mejorada de Euler* o la *fórmula de Heun*. Que la Ec. (5) representa una mejora sobre la fórmula de Euler (2), descansa en el hecho de que el error local de fórmula, al usarse la Ec. (5) es proporcional a h^3 mientras que para el método de Euler es proporcional a h^2. El error estimado para la fórmula mejorada de Euler se establece en el problema 4. Puede demostrarse también que el error acumulado de fórmula para la fórmula mejorada de Euler está acotado por una constante multiplicada por h^2. Nótese que esta precisión más grande se realiza a expensas de más trabajo computacional, ya que ahora es necesario evaluar $f(x, y)$ dos veces para ir de x_n a x_{n+1}.

Ejemplo. Para ilustrar el uso de la fórmula mejorada de Euler (5) consideremos otra vez el problema de valores iniciales

$$y' = 1 - x + 4y, \quad y(0) = 1. \tag{6}$$

Para el problema presente $f(x, y) = 1 - x + 4y$; por lo tanto

$$y'_n = 1 - x_n + 4y_n,$$

y

$$f[x_n + h, y_n + hy'_n] = 1 - (x_n + h) + 4(y_n + hy'_n).$$

Usando un tamaño de paso $h = 0.1$ construimos la tabla 7.3. Nótese que una persona que no sepa nada de ecuaciones diferenciales puede completar esta tabla simplemente siguiendo las instrucciones que están en el renglón marcado Instrucciones de la Tabla.*

Un diagrama de flujo para el método mejorado de Euler es similar al del método de Euler de la sección 7.2. La diferencia principal es que en las cajas segunda y tercera se reemplaza y'_n por $F(x_n, y_n)$, donde $F(x_n, y_n) = \frac{1}{2} f(x_n, y_n) + f[x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)]$.

Los resultados que se obtienen usando el método mejorado de Euler con $h = 0.1$ no son solamente mejores que los obtenidos con el método de Euler para $h = 0.1$, sino son también mejores que los obtenidos con el método de

* Una persona con experiencia puede reducir el número de operaciones, ya que algunos resultados pueden computarse sin registrar los resultados intermedios. Por ejemplo, no es necesario registrar G al calcular H.

Euler para $h = 0.05$. Esto está indicado claramente por los resultados tabulados en la tabla 7.4. Por lo tanto, aunque se necesitan más cálculos para el uso de la fórmula mejorada de Euler, se pueden obtener resultados substancialmente mejores con la mitad del número de pasos. Los resultados usando la

TABLA 7.4 Una Comparación de los Resultados Usando el Método de Euler y el Método Perfeccionado de Euler para $h = 0.1$ y $h = 0.05$ para el Problema de Valores Iniciales $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$

	Euler		Mejorado de Euler		
x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	Exacto
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5000000	1.5475000	1.5950000	1.6049750	1.6090418
0.2	2.1900000	2.3249000	2.4636000	2.4932098	2.5053299
0.3	3.1460000	3.4333560	3.7371280	3.8030484	3.8301388
0.4	4.4744000	5.0185326	5.6099494	5.7404023	5.7942260
0.5	6.3241600	7.2901870	8.3697252	8.6117498	8.7120041
0.6	8.9038240	10.550369	12.442193	12.873253	13.052522
0.7	12.505354	15.234032	18.457446	19.203865	19.515518
0.8	17.537495	21.967506	27.348020	28.614138	29.144880
0.9	24.572493	31.652708	40.494070	42.608178	43.497903
1.0	34.411490	45.588400	59.938223	63.424698	64.897803

fórmula mejorada de Euler con $h = 0.05$ están también tabulados en la tabla 7.4. Estos resultados están casi en completo acuerdo con los valores de la solución exacta, los errores porcentuales en $x = 0.5$ y $x = 1.0$ son 1.15% y 2.3% respectivamente.

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 3 constrúyase una tabla para usarla con el método perfeccionado de Euler y determine valores aproximados de la solución exacta en $x = 0.1$, 0.2, y 0.3. Tómese $h = 0.1$. Compare sus resultados con los obtenidos usando el método de Euler y los resultados exactos (si éstos se pueden obtener). Utilice cuatro dígitos en sus cálculos.

1. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$
2. $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$
3. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$

4. En este problema estableceremos que el error local de fórmula para la fórmula de Euler perfeccionada es proporcional a h^3. Suponiendo que la solución ϕ del problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ tenga derivadas que sean continuas hasta el tercer orden (f tiene segundas derivadas parciales continuas) se concluye que

$$\phi(x_n + h) = \phi(x_n) + \phi'(x_n)h + \frac{\phi''(x_n)h^2}{2!} + \frac{\phi'''(\bar{x}_n)h^3}{3!},$$

donde $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$. Supóngase que $y_n = \phi(x_n)$.

a) Mostrar que para y_{n+1} como dado por la Ec. (5)

$$e_{n+1} = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1}$$
$$= \frac{\phi''(x_n)h - \{f[x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)] - f(x_n, y_n)\}}{2!}h + \frac{\phi'''(\bar{x}_n)h^3}{3!}. \quad \text{(i)}$$

b) Haciendo uso del hecho que $\phi''(x) = f_x[x, \phi(x)] + f_y[x, \phi(x)]\phi'(x)$ y que la serie de Taylor con un residuo para una función de dos variables (que aceptaremos sin prueba) es

$$F(a + h, b + k) = F(a, b) + F_x(a, b)h + F_y(a, b)k$$
$$+ \frac{1}{2!}(h^2F_{xx} + 2hkF_{xy} + k^2F_{yy})\big|_{x=\xi,\, y=\eta},$$

donde ξ está entre a y $a + h$ y η está entre b y $b + k$, mostrar que el primer término del miembro derecho del Ec. (i) es proporcional a h^3 más términos de orden superior. Este es el resultado deseado.

c) Mostrar que si $f(x, y)$ es lineal en x y y, entonces $e_{n+1} = \phi'''(\bar{x}_n)h^3/6$, donde $x_n < \bar{x}_n < x_{n+1}$.
Sugerencia: ¿Qué son f_{xx}, f_{xy}, y f_{yy}?

5. Considérese el método mejorado de Euler para resolver el problema de valores iniciales $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$. Usando el resultado de la parte *c*) del problema 4 y la solución exacta del problema de valores iniciales, determine e_{n+1} y una cota para el error en cualquier paso sobre $0 \leq x \leq 1$. Compare este error con el obtenido en la sección anterior, Ec. (15) usando el método de Euler. Obtenga también una cota para e_1 con $h = 0.1$ y compárela con la Ec. (16) de la sección anterior.

6. Haciendo uso de la solución exacta, determine e_{n+1} y una cota para e_{n+1} en cualquier paso sobre $0 \leq x \leq 1$ para el método de Euler mejorado para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales. Obtenga también una cota para e_1 con $h = 0.1$ y compárela con la similar estimada por el método de Euler, y el error real usando el método de Euler mejorado.

a) $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$ *b*) $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$

7. La *fórmula de Euler modificada* para el problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ está dada por

$$y_{n+1} = y_n + hf[x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hf(x_n, y_n)].$$

Siguiendo el procedimiento delineado en el problema 4 muéstrese que el error local de fórmula en la fórmula de Euler modificada es proporcional a h^3.

8. Usando la fórmula modificada de Euler con $h = 0.1$ calcule valores aproximados de la solución exacta en $x = 0.1$, 0.2, y 0.3 para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales.

a) $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$

c) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$

Cuando sea apropiado, compare sus resultados con los obtenidos anteriormente.

7.5 EL METODO DE LA SERIE DE TAYLOR DE TRES TERMINOS

Vimos en la sección 7.2 que la fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ para resolver el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

y

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

puede deducirse reteniendo los dos primeros términos en la serie de Taylor para la solución $y = \phi(x)$ alrededor del punto $y = x_n$. Una fórmula más precisa puede obtenerse usando los primeros tres términos. Suponiendo que ϕ tiene al menos tres derivadas continuas en el intervalo de interés (f tiene segundas derivadas parciales continuas), tenemos, usando la serie de Taylor con un residuo,

$$\phi(x_n + h) = \phi(x_n) + \phi'(x_n)h + \phi''(x_n)\frac{h^2}{2!} + \phi'''(\bar{x}_n)\frac{h^3}{3!}, \tag{3}$$

donde $\bar{x}_n$ es algún punto en el intervalo $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$.
De la Ec. (1)

$$\phi'(x_n) = f[x_n, \phi(x_n)]. \tag{4}$$

Además, $\phi''(x)$ puede ser calculada de la Ec. (1)

$$\phi''(x) = f_x[x, \phi(x)] + f_y[x, \phi(x)]\phi'(x). \tag{5}$$

Por lo tanto

$$\phi''(x_n) = f_x[x_n, \phi(x_n)] + f_y[x_n, \phi(x_n)]\phi'(x_n). \tag{6}$$

La fórmula de la serie de Taylor de tres términos se obtiene reemplazando $\phi(x_n)$ por su valor aproximado y_n en las fórmulas para $\phi'(x)$ y $\phi''(x)$ y despreciando entonces el término $\phi'''(\bar{x}_n)h^3/3!$ en la Ec. (3). Obtenemos por lo tanto

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n, \tag{7}$$

donde

$$y'_n = f(x_n, y_n), \tag{8}$$

y

$$y''_n = f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)y'_n. \tag{9}$$

Es trivial mostrar, suponiendo $\phi(x_n) = y_n$, que el error local de fórmula e_{n+1} asociado con la fórmula (7) es

$$e_{n+1} = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1} = \tfrac{1}{6}\phi'''(\bar{x}_n)h^3, \tag{10}$$

donde $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$. Por lo tanto, el error local de fórmula para la fórmula de la serie de Taylor de tres términos es proporcional a h^3, justamente como la fórmula de Euler mejorada discutida en la sección anterior. Otra vez puede mostrarse que el error acumulado de fórmula no es mayor que una constante multiplicada por h^2.

La fórmula de la serie de Taylor de tres términos requiere el cálculo de $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$, y la evaluación entonces de estas funciones así como de $f(x, y)$ en (x_n, y_n). En algunos problemas puede ser difícil, o bastante largo, calcular f_x y f_y. Si éste es el caso, probablemente es mejor usar una fórmula con precisión comparable, como la fórmula de Euler modificada, que no requiere las derivadas parciales f_x y f_y. En principio, se pueden desarrollar fórmulas de series de Taylor de cuatro términos o aún más; sin embargo, tales fórmulas involucran derivadas parciales de f de más alto grado aún, y en general puede resultar muy fatigoso usarlas.

Ejemplo. Para el ejemplo ilustrativo

$$y' = 1 - x + 4y, \qquad y(0) = 1$$

el método de la serie de Taylor de tres términos es bastante conveniente. Tenemos

$$f(x, y) = 1 - x + 4y,$$

$$f_x(x, y) = -1, \qquad f_y(x, y) = 4.$$

Por lo tanto

$$y'_n = 1 - x_n + 4y_n, \qquad y''_n = -1 + 4y'_n. \tag{11}$$

Se concluye de la Ec. (11) que $y'_0 = 5$ y $y''_0 = 19$. Tomando $h = 0.1$ y substituyéndola en la Ec. (7) nos da

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + (0.1)(5) + (0.005)(19) \\ &= 1.595. \end{aligned}$$

Para el problema ejemplo los resultados obtenidos usando el método de la serie de Taylor de tres términos son idénticos, excepto por pequeñas diferencias debidas a errores de redondeo, a los obtenidos usando el método mejorado de Euler. La razón para esto es que cuando $f(x, y)$ es lineal en x y y los dos métodos son idénticos. Esto puede mostrarse desarrollando la fórmula mejorada de Euler alrededor del punto (x_n, y_n) y comparando el desarrollo con la fórmula de la serie de Taylor de tres términos. (Ver problema 4 de la sección 7.4. Note que las funciones f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} son cada una cero.)

Por lo tanto, los resultados dados en la tabla 7.4 para el método mejorado de Euler para $h = 0.1$ y $h = 0.05$ se aplican también al método de la serie de Taylor de tres términos. Por otra parte, si no es lineal en x y y los dos métodos darán resultados ligeramente diferentes. Por ejemplo, los resultados son diferentes para el tercero de los problemas ejercicio, $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 3 determine la fórmula de la serie de Taylor de tres términos para y_{n+1}. Construya una tabla apropiada y determine valores

aproximados para la solución exacta en $x = 0.1$, 0.2 y 0.3. Tómese $h = 0.1$. Compare sus resultados con los obtenidos usando el método de Euler, el método mejorado de Euler y los resultados exactos (si se pueden obtener). Haga sus cálculos con cuatro dígitos.

1. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$
2. $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$
3. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$

4. Para el problema ilustrativo $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$, determine valores aproximados de la solución exacta en $x = 0.2$ y 0.3, usando el método de la serie de Taylor de tres términos. Tome $h = 0.1$. Conserve cuatro dígitos. Compruebe sus resultados contra los dados en la tabla 7.4.

Los problemas 5, 6 y 7 tratan con el problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Sea $y = \phi(x)$ la solución exacta.

5. Mostrar que el error de fórmula local e_{n+1}, usando la fórmula de la serie de Taylor de tres términos está dado por $\phi'''(\bar{x}_n)h^3/6$, $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$. Recuérdese que al calcular e_{n+1} se supone que $y_n = \phi(x_n)$.

6. Dedúzcase una fórmula para la serie de Taylor de cuatro términos para y_{n+1} en términos de $f(x, y)$ y sus derivadas parciales evaluadas en (x_n, y_n). ¿Cuál es la fórmula del error local?

7. Siguiendo los lineamientos del método de Richardson (problemas 6 y 8 de la sección 7.3) muéstrese que una estimación para $\phi(\bar{x})$, $\bar{x} = x_0 + nh$, en términos de $y_n(h)$ y $y_{2n}(h/2)$ calculada usando el método de la serie de Taylor de tres términos o el método mejorado de Euler está dado por $y_{2n}(h/2) + [y_{2n}(h/2) - y_n(h)]/(2^2 - 1)$. Para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales calcúlense valores aproximados de $\phi(0.2)$ usando la fórmula de la serie de Taylor de tres términos con $h = 0.2$ y $h = 0.1$, y úsese entonces esta fórmula para determinar una nueva estimación de $\phi(0.2)$. Compárese con el resultado exacto en *a*) y *b*). Estímese también la precisión del resultado usando $h = 0.1$.

a) $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \frac{1}{2} - x + 2y, \quad y(0) = 1$

c) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$

8. Considérese el problema de valores iniciales $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$. Usando los resultados aproximados para $\phi(1)$ obtenidos por el método mejorado de Euler para $h = 0.1$ y $h = 0.05$ (ver tabla 7.4) y el procedimiento discutido en el problema 7 (o problemas 6 y 8 de la sección 7.3), determine una nueva estimación de $\phi(1)$. Compare este resultado con el valor de la solución exacta.

7.6 EL METODO DE RUNGE-KUTTA

Consideremos otra vez el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

con

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

En la sección anterior desarrollamos una fórmula de serie de Taylor de tres términos que involucra las funciones f_x y f_y. Desafortunadamente, las fórmulas de serie de Taylor de mayor orden se hacen inmanejables debido a que deben calcularse derivadas parciales de f de alto orden.

Sin embargo, es posible desarrollar fórmulas que son equivalentes a las fórmulas de tercero, cuarto, quinto o aun más alto orden de la serie de Taylor en las que no se involucran derivadas parciales de f. Por un procedimiento numéricamente equivalente, entendemos que los errores locales de fórmula son, cada uno de ellos, proporcionales a la misma potencia de h más términos de alto orden (posiblemente diferentes). El desarrollo de estas fórmulas principió con el trabajo de Runge (1856-1927) en 1895 y fue continuado por Kutta (1867-1944) en 1901. La fórmula clásica de Runge-Kutta es equivalente a una fórmula de serie de Taylor de cinco términos*

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y^{\text{iv}}_n. \tag{3}$$

La fórmula de Runge-Kutta involucra un promedio pesado de los valores de $f(x, y)$ tomado en puntos diferentes en el intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. Está dada por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}), \tag{4}$$

donde

$$k_{n1} = f(x_n, y_n), \tag{5a}$$
$$k_{n2} = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n1}), \tag{5b}$$
$$k_{n3} = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n2}), \tag{5c}$$
$$k_{n4} = f(x_n + h, y_n + hk_{n3}). \tag{5d}$$

La suma $(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})/6$ puede interpretarse como una pendiente promedio. Nótese que k_{n1} es la pendiente en el extremo izquierdo del intervalo, k_{n2} es la pendiente en el punto medio usando la fórmula de Euler para ir de x_n a $x_n + h/2$, k_{n3} es una segunda aproximación a la pendiente en el punto medio, y finalmente k_{n4} es la pendiente en $x_n + h$ usando la fórmula de Euler y la pendiente k_{n3} para ir de x_n a $x_n + h$.

Mientras que en principio no es demasiado difícil mostrar que las Ecs. (3) y (4) difieren por términos que son proporcionales a h^5, el álgebra es extraordinariamente larga. Por lo tanto, aceptaremos el hecho de que el error local de fórmula al usar la Ec. (4) es proporcional a h^5 y que el error acumulado de fórmula es, a lo más, una constante multiplicada por h^4. Una deducción de una fórmula de Runge-Kutta que es equivalente a la fórmula de la serie de Taylor de tres términos está dada en el problema 5.

Claramente, la fórmula de Runge-Kutta, Ecs. (4) y (5), es más complicada que cualquiera de las fórmulas que hemos discutido anteriormente. Por otra parte, deberá recordarse que ésta es una fórmula muy precisa (tomando la mitad del tamaño de paso se reduce el error local de fórmula por un factor

* Los números y''_n, y'''_n y y^{iv}_n se obtienen por derivación sucesiva de la Ec. (1), y haciendo entonces la evaluación en (x_n, y_n). Ver la Ec. (9) de la sección 7.5.

1/32); y además, no es necesario calcular ninguna derivada parcial de f. Notaremos también que si f no depende de y entonces

$$k_{n1} = f(x_n), \qquad k_{n2} = k_{n3} = f(x_n + \tfrac{1}{2}h), \qquad k_{n4} = f(x_n + h),$$

y la Ec. (4) es idéntica con la obtenida usando la regla de Simpson (1710-1761) (ver problema 6) para evaluar la integral de $y' = f(x)$:

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} dy = \int_{x_n}^{x_n+h} f(x)\, dx$$

ó

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}\,[f(x_n) + 4f(x_n + \tfrac{1}{2}h) + f(x_n + h)].$$

El hecho de que la regla de Simpson tiene un error que es proporcional a h^5 está de acuerdo con el comentario anterior concerniente al error en la fórmula de Runge-Kutta.

La fórmula de Runge-Kutta, Ecs. (4) y (5), es una de las más ampliamente usadas de todas las fórmulas de un solo paso.

Ejemplo. Usando el método de Runge-Kutta calcúlese un valor aproximado de la solución exacta $y = \phi(x)$ en $x = 0.2$ para el problema de valores iniciales ilustrativo.

$$y' = 1 - x + 4y, \qquad y(0) = 1.$$

Tomando $h = 0.2$ tenemos

$$k_{01} = f(0, 1) = 5; \qquad hk_{01} = 1.0$$
$$k_{02} = f(0 + 0.1, 1 + 0.5) = 6.9; \qquad hk_{02} = 1.38$$
$$k_{03} = f(0 + 0.1, 1 + 0.69) = 7.66; \qquad hk_{03} = 1.532$$
$$k_{04} = f(0 + 0.2, 1 + 1.532) = 10.928.$$

De aquí que

$$y_1 = 1 + \frac{0.2}{6}\,[5 + 2(6.9) + 2(7.66) + 10.928]$$
$$= 1 + 1.5016 = 2.5016.$$

El valor exacto de $\phi(0.2)$ es 2.5053299. Por lo tanto, el método de Runge-Kutta con un tamaño de paso de $h = 0.2$ da un mejor resultado que el método de Euler (2.19) con $h = 0.1$, o el método mejorado de Euler (2.4636) con $h = 0.1$.

Una tabulación de los resultados para el ejemplo ilustrativo para los diferentes métodos que se han discutido está dado en la tabla 7.5. Los resultados para el método de Taylor de tres términos se omiten ya que son idénticos a los del método mejorado de Euler. La precisión del método de Runge-Kutta para el problema presente, puede verse comparando los valores aproximados

TABLA 7.5 Comparación de los Resultados para la Solución Numérica del Problema de Valores Iniciales $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$

	Euler	Mejorado de Euler	Runge-Kutta		Exacto
x	$h = 0.1$	$h = 0.1$	$h = 0.2$	$h = 0.1$	
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5000000	1.5950000		1.6089333	1.6090418
0.2	2.1900000	2.4636000	2.5016000	2.5050062	2.5053299
0.3	3.1460000	3.7371280		3.8294145	3.8301388
0.4	4.4774000	5.6099494	5.7776358	5.7927853	5.7942260
0.5	6.3241600	8.3697252		8.7093175	8.7120041
0.6	8.9038240	12.442193	12.997178	13.047713	13.052522
0.7	12.505354	18.457446		19.507148	19.515518
0.8	17.537495	27.348020	28.980768	29.130609	29.144880
0.9	24.572493	40.494070		43.473954	43.497903
1.0	34.411490	59.938223	64.441579	64.858107	64.897803

de $\phi(1)$ usando métodos diferentes y diferentes tamaños de paso. Esto se hace en la tabla 7.6. Nótese que los resultados para el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ son mejores que los resultados con cualquiera de los otros métodos con $h = 0.01$, cien pasos comparados con sólo diez, ¡realmente un ciento de cálculos de $f(x, y)$ comparados con cuarenta!

TABLA 7.6 Comparación de los Resultados Usando Diferentes Procedimientos Numéricos y Diferentes Tamaños de Paso para el Valor en $x = 1$ de la Solución del Problema de Valores Iniciales $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$

h	Euler	Mejorado de Euler	Runge-Kutta	Exacto
0.2			64.441579	64.897803
0.1	34.411490	59.938223	64.858107	64.897803
0.05	45.588400	63.424698	64.894875	64.897803
0.025	53.807866	64.497931	64.897604	64.897803
0.01	60.037126	64.830722	64.897798	64.897803

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 3 constrúyase una tabla para usarse con el método de Runge-Kutta y determínense valores aproximados de la solución exacta en $x = 0.2$ y 0.4. Tómese $h = 0.2$. Compárese sus resultados con los obtenidos por otros métodos y con los resultados exactos (si se pueden obtener). Háganse los cálculos con cuatro dígitos.

1. $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$
2. $y' = \frac{1}{2} - x + 2y$, $y(0) = 1$
3. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$

4. Usando el método de Runge-Kutta, calcule un valor aproximado de la solución exacta $y = \phi(x)$ en $x = 0.4$ para el ejemplo ilustrativo $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$. Use $h = 0.2$, y el valor aproximado de $\phi(0.2)$ dado en el ejemplo del texto. Compare su resultado con el valor dado en la tabla 7.5.

*5. Considere el problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_C$. La correspondiente fórmula de la serie de Taylor de tres términos es

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n. \tag{i}$$

Por el momento considérese la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\{af(x_n, y_n) + bf[x_n + \alpha h, y_n + \beta hf(x_n, y_n)]\}, \tag{ii}$$

donde a, b, α y β son arbitrarios.

a) Muestre, desarrollando el miembro derecho de esta fórmula alrededor del punto (x_n, y_n) que para $a + b = 1$, $b\alpha = \frac{1}{2}$ y $b\beta = \frac{1}{2}$ la diferencia entre las fórmulas (i) y (ii) es proporcional a h^3.
Sugerencia: Use el desarrollo en serie de Taylor para una función de dos variables dada en el problema 4 de la sección 7.4.

b) Muestre que las ecuaciones para a, b, α y β tienen la infinidad de soluciones $a = 1 - \lambda$, $b = \lambda$ y $\alpha = \beta = 1/2\,\lambda$, $\lambda \neq 0$.

c) Para $\lambda = \frac{1}{2}$, muéstrese que la Ec. (ii) se reduce a la fórmula mejorada de Euler dada en la sección 7.4.

d) Para $\lambda = 1$, muéstrese que la Ec. (ii) se reduce a la ecuación modificada de Euler dada en el problema 7 de la sección 7.4.

6. Para deducir la regla de Simpson para el valor aproximado de la integral de $f(x)$ de $x = 0$ a $x = h$, mostrar primero que

$$\int_0^h (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch.$$

En seguida elegir las constantes A, B y C tales que la parábola $Ax^2 + Bx + C$ pase a través de los puntos $[0, f(0)]$, $[h/2, f(h/2)]$, y $[h, f(h)]$. Usando este polinomio para representar $f(x)$ aproximadamente sobre el intervalo $0 \le x \le h$, substitúyanse A, B y C en la fórmula anterior para obtener

$$\int_0^h f(x)\,dx \cong \frac{h}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{h}{2}\right) + f(h)\right].$$

Puede mostrarse que el error al usar esta fórmula es proporcional a h^5.

7. Siguiendo las líneas del método de Richardson (problemas 6 y 8 de la sección 7.3), mostrar que para el problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ una estimación para $\phi(\bar{x})$, $\bar{x} = x_0 + nh$ en términos de $y_n(h)$ y $y_{2n}(h/2)$ para el método de Runge-Kutta está dada por $y_{2n}(h/2) + [y_{2n}(h/2) - y_n(h)]/(2^4 - 1)$. Considérese el problema de valores iniciales ilustrativo $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$. Usando los valores aproximados de $\phi(1)$ obtenidos por el método de Runge-Kutta con $h = 0.2$ y $h = 0.1$ (tabla 7.5) y la fórmula anterior, obténgase una nueva estimación para $\phi(1)$. Compare su resultado con la solución exacta.

7.7 ALGUNAS DIFICULTADES CON LOS METODOS NUMERICOS

En la sección 7.3 discutimos algunas ideas relacionadas a los errores que pueden encontrarse en una solución numérica del problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

En esta sección continuaremos esta discusión, y apuntaremos también varias otras dificultades que pueden surgir. Los puntos que deseamos discutir son bastante difíciles de tratar a este nivel, y nos contentaremos con ilustrarlos por medio de ejemplos.

Primero, recordemos que para el método de Euler se mostró que el error local de fórmula es proporcional a h^2 y que el error acumulado de fórmula es, a lo más, una constante multiplicada por h. Aunque no lo probemos, es verdad en general que si el error local de fórmula es proporcional a h^p entonces el error acumulado de fórmula está acotado por una constante multiplicada por h^{p-1}. Para obtener gran precisión, usamos normalmente un procedimiento numérico para el que p es grande (para el método de Runge-Kutta $p = 5$). Cuando p crece, la fórmula usada para calcular y_{n+1} normalmente se hace más complicada, y por lo tanto se requieren más cálculos en cada paso; sin embargo, esto no es un problema serio cuando se usa una computadora de alta velocidad, a menos de que $f(x, y)$ sea muy complicada.

Si se disminuye el tamaño del paso h, el error acumulado de fórmula disminuye por el mismo factor elevado a la potencia $p - 1$. Sin embargo, como se mencionó en la sección 7.3, si h es demasiado pequeño, se requerirán muchos pasos para cubrir un intervalo fijo, y el error acumulado de redondeo puede hacerse más grande que el error acumulado de fórmula. Esto está ilustrado al resolver nuestro problema ejemplo

$$y' = 1 - x + 4y, \qquad y(0) = 1 \tag{2}$$

sobre el intervalo $0 \le x \le 1$ usando el método de Runge-Kutta* con diferentes tamaños de paso h. En la tabla 7.7 se muestra la diferencia entre el valor de la solución exacta y el valor calculado en $x = 1$ para diversos valores de h. Nótese que inicialmente el error disminuye cuando h lo hace de alrededor de 0.025 a 0.02 (N, el número de pasos se aumenta de alrededor de 40 a 50), pero después de esto principia a crecer cuando h disminuye. Este es el resultado del error acumulado de redondeo. No es posible nombrar un valor óptimo de N, ya que para valores de N de 40 a 55, tanto el error acumulado de fórmula como el error acumulado de redondeo están afectando probablemente los últimos dos dígitos significativos, y el error pequeño es oscilatorio.

Como un segundo ejemplo de los tipos de dificultades que pueden surgir cuando se usan sin cuidado los procedimientos numéricos, considérese el problema de determinar la solución $y = \phi(x)$ de

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 1. \tag{3}$$

* Los cálculos en esta sección fueron llevados a cabo con una computadora IBM 360-50 con una precisión de siete dígitos. Para obtener todos los resultados dados en la tabla 7.7 se requirió un tiempo de máquina de 55.72 segundos.

TABLA 7.7 Una Comparación del Error en $x = 1$ Usando Diferentes Tamaños de Paso y el Método de Runge-Kutta para el Problema de Valores Iniciales $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$

$N = 1/h$	h	$(-1) \times$ Error en $x = 1$
10	0.1	0.04008
20	0.05	0.00336
30	0.03333333	0.00114
40	0.025	0.00078
50	0.02	0.00089
60	0.01666667	0.00101
80	0.0125	0.00111
160	0.00625	0.00212
320	0.003125	0.00357
640	0.0015625	0.00731
1280	0.00078125	0.01567

Esta es una ecuación no lineal, y el Teorema de existencia y unicidad 2.2 garantiza solamente que hay una solución en *algún* intervalo alrededor de $x = 0$. Supóngase que tratamos de calcular una solución del problema de valores iniciales sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$ usando diferentes procedimientos numéricos.

Si usamos un método de Euler con $h = 0.1$, 0.05, y 0.01, encontramos los siguientes valores aproximados en $x = 1$; 7.189500, 12.32054, y 90.68743, respectivamente. Las grandes diferencias entre los valores calculados son evidencia convincente de que debemos usar un procedimiento numérico más preciso, el método de Runge-Kutta, por ejemplo. Usando el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ encontramos el valor aproximado 735.0004 en $x = 1$, que es bastante diferente de aquéllos obtenidos usando el método de Euler. Si fuéramos ingenuos y nos detuviéramos ahora, cometeríamos un grave error. Repitiendo los cálculos usando tamaños de paso de $h = 0.05$ y $h = 0.01$ obtenemos la información interesante listada en la tabla 7.8.

TABLA 7.8 Cálculo de la Solución del Problema de Valores Iniciales $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ Usando el Método de Runge-Kutta

h	$x = 0.90$	$x = 1.0$
0.1	14.02158	735.0004
0.05	14.27042	1.755613×10^4
0.01	14.30200	$> 10^{15}$

Mientras que los valores en $x = 0.90$ son razonables y podríamos creer que la solución exacta tiene un valor de alrededor de 14.3 en $x = 0.90$, es claro que algo extraño está pasando entre $x = 0.9$ y $x = 1.0$. Para ayudarnos a

determinar qué es lo que pasa volvamos a algunas aproximaciones analíticas a la solución del problema de valores iniciales (3). Nótese que sobre $0 \leq x \leq 1$.

$$y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 + y^2. \tag{4}$$

Por lo tanto la solución $y = \phi_1(x)$ de

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{5}$$

y la solución $y = \phi_2(x)$ de

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{6}$$

crecen más rápida y menos rápidamente, respectivamente, que la solución $y = \phi(x)$ del problema original. Por lo tanto todas estas soluciones pasan a través del mismo punto inicial, $\phi_2(x) \leq \phi(x) \leq \phi_1(x)$. La cosa importante de notar es que *podemos resolver* las Ecs. (5) y (6) para ϕ_1 y ϕ_2 por separación de variables. Encontramos que

$$\phi_1(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \phi_2(x) = \frac{1}{1 - x}. \tag{7}$$

Por lo tanto $\phi_2(x) \to \infty$ cuando $x \to 1$ y $\phi_1(x) \to \infty$ cuando $x \to \pi/4 \cong 0.785$. Estos cálculos muestran que la solución del problema original de valores iniciales deberá hacerse no acotada en alguna parte entre $x \cong 0.785$ y $x = 1$. Ahora sabemos que el problema (3) no tiene solución sobre el intervalo completo $0 \leq x \leq 1$.

Sin embargo, nuestros cálculos numéricos sugieren que podemos ir más allá de $x = 0.785$ y probablemente más allá de $x = 0.9$. Suponiendo que el problema de valores iniciales existe en $x = 0.9$ y tiene el valor 14.3, podemos obtener una evaluación más precisa de lo que pasa para x grandes considerando los problemas de valores iniciales (5) y (6) con $y(0) = 1$ reemplazada por $y(0.9) = 14.3$. Entonces obtenemos

$$\phi_1(x) = \tan(x + 0.6010), \qquad \phi_2(x) = \frac{1}{0.9699 - x} \tag{8}$$

donde se han conservado sólo cuatro lugares decimales. Por lo tanto, $\phi_1(x) \to \infty$ cuando $x \to \pi/2 - 0.6010 \cong 0.9698$ y $\phi_2(x) \to \infty$ cuando $x \to 0.9699$. Concluimos que la solución del problema de valores iniciales (3) se hace no acotado cerca de $x = 0.97$. No podemos ser más precisos que esto porque la condición inicial $y(0.9) = 14.3$ es sólo aproximada. Este ejemplo ilustra la clase de información que puede obtenerse con una juiciosa combinación del trabajo analítico y numérico.

Como un ejemplo final, considérese el problema de determinar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal de segundo orden

$$y'' - 100y = 0 \tag{9}$$

para $x > 0$. La generalización de las técnicas numéricas de las ecuaciones de primer orden a ecuaciones de orden superior o a sistemas de ecuaciones, es directa, pero no se necesita un conocimiento de estas técnicas para esta discusión. Dos soluciones linealmente independientes de la Ec. (9) son $\phi_1(x) = \cosh 10x$ y $\phi_2(x) = \operatorname{senh} 10x$. La solución $\phi_1(x) = \cosh 10x$ es gene-

rada por las condiciones iniciales $\phi_1(0) = 1$, $\phi'_1(0) = 0$. La solución $\phi_2(x) =$ senh $10x$ es generada por las condiciones iniciales $\phi_2(0) = 0$, $\phi'_2(0) = 10$. Mientras que analíticamente podemos expresar la diferencia entre cosh $10x$ y senh $10x$, para x grande tenemos cosh $10x \sim e^{10x}/2$ y senh $10x \sim e^{10x}/2$ y numéricamente estas dos funciones lucen exactamente igual si sólo se trabaja con algunos dígitos. Por ejemplo, con ocho dígitos significativos

$$\text{senh } 10 = \cosh 10 = 11{,}013.233.$$

Si se llevan a cabo los cálculos en una máquina que maneja solamente siete dígitos, las dos soluciones ϕ_1 y ϕ_2 son idénticas en $x = 1$ y realmente para toda $x > 1$. Por lo tanto, mientras que las soluciones sean linealmente independientes, debido a que trabajamos sólo con un número finito de dígitos, su tabulación numérica mostraría que son las mismas. Llamamos a este fenómeno *dependencia numérica*. Este es uno de los problemas importantes y difíciles que siempre se encuentra cuando se está resolviendo una ecuación de segundo orden o mayor que tiene al menos una solución que crece muy rápidamente.

Para el problema presente podemos hacer a un lado, parcialmente, esta dificultad calculando, en lugar de senh $10x$ y cosh $10x$ las soluciones linealmente independientes $\phi_3(x) = e^{10x}$ y $\phi_4(x) = e^{-10x}$ correspondientes a las condiciones iniciales $\phi_3(0) = 1$, $\phi'_3(0) = 10$ y $\phi_4(0) = 1$, $\phi'_4(0) = -10$, respectivamente. La solución ϕ_3 crece exponencialmente mientras que ϕ_4 decae exponencialmente. Aun en este caso, encontraremos difícil calcular ϕ_4 correctamente si el intervalo es grande. La razón es que en cada paso del cálculo de ϕ_4 introduciremos errores de fórmula y de redondeo. Por lo tanto, en cualquier punto x_n los datos usados para ir al punto siguiente no son precisamente los valores de $\phi_4(x_n)$ y $\phi'_4(x_n)$. La solución del problema de valores iniciales con estos datos en x_n involucrará no solamente e^{-10x} sino también e^{10x}. Debido a que el error en los datos en x_n es pequeño, la última función aparecerá con un coeficiente muy pequeño. No obstante, ya que e^{-10x} tiende a cero y e^{10x} crece muy rápidamente, la última eventualmente dominará y la solución calculada será simplemente un múltiplo de $e^{10x} = \phi_3(x)$.

Otros problemas prácticos que a menudo se encuentra el analista numérico, son cómo calcular soluciones de una ecuación diferencial en las cercanías de un punto singular regular y cómo calcular numéricamente la solución de una ecuación diferencial sobre un intervalo *no acotado*. Tales problemas generalmente requieren una combinación de trabajo analítico y numérico.

REFERENCIAS

Hay muchos libros de diferentes grados de sofisticación que tratan con análisis numérico en general, programación, y la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y de ecuaciones diferenciales parciales. El libro mencionado en el texto es:

Henrici, Peter, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, Nueva York, 1962.

Da una abundante información teórica acerca de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias; sin embargo, es bastante avanzado.

Dos de los muchos textos elementales generales con capítulos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias son:

Henrici, Peter, *Elements of Numerical Analysis*, Wiley, Nueva York, 1964.

McCracken, Daniel D. y Dorn, William S., *Numerical Methods and Fortran Programming*, Wiley, Nueva York, 1964.

Solución de problemas

CAPITULO UNO

Página 22

1. *a*) Lineal de 2.° orden. *b*) No lineal de 2.° orden.
   c) Lineal de 4.° orden. *d*) No lineal de 1.^{er} orden.
   e) No lineal de 2.° orden. *f*) Lineal de 3.^{er} orden.
3. *a*) $r = -2$ *b*) $r = \pm 1$ *c*) $r = 2, -3$ *d*) $r = 0, 1, 2$
4. *a*) $r = -1, -2$ *b*) $r = 1, 4$

CAPITULO DOS

Sección 2.1, Página 29

1. $y = ce^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2x}$
2. $y = ce^{2x} + \frac{x^3}{3} e^{2x}$
3. $y = ce^{-x} + 1 + \frac{x^2}{2} e^{-x}$
4. $y = \frac{c}{x} + \frac{3}{4} \frac{\cos 2x}{x} + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x$
5. $y = 3e^{x} + 2(x - 1)e^{2x}$
6. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{-2x}$
7. $y = e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{1 + t^2}\, dt$
8. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
9. $x = ce^{-y} + \frac{1}{2}e^{y}$

14. *a*) Ver el problema 2. *b*) Ver el problema 4.

Sección 2.2, Página 33

1. $y = \frac{c}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x$
2. $y = \frac{c}{x^3} - \frac{\cos x}{x^3}$
3. $y = (c - 2x \cos x + 2 \operatorname{sen} x) \cos x$
4. $y = \frac{c + (x - 1)e^x}{x^2}$
5. $y = \frac{1}{12}\left(3x^2 - 4x + 6 + \frac{1}{x^2}\right), \quad x > 0$
6. $y = \frac{1}{x}(e^x + 1 - e), \quad x > 0$
7. $y = \frac{2x + 1 - \pi}{\operatorname{sen} x}, \quad 0 < x < \pi$

8. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}, \qquad x > 0$

9. $y = \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{1}{x}; \qquad \lim\limits_{x\to 0}|y| = \infty$ para toda c.

10. $y = cx + x^2; \qquad \lim\limits_{x\to 0} y = 0$ para toda c.

11. $y = cx + 2x^{3/2}; \qquad \lim\limits_{x\to 0} y = 0$ para toda c, pero $y', y'', \ldots$, todas $\to \pm\infty$ cuando $x \to 0$.

12. $y = \dfrac{c + \operatorname{sen} x}{x}; \qquad \lim\limits_{x\to 0} y = \begin{cases} \pm\infty, & c \neq 0 \\ 1, & c = 0 \end{cases}$

13. $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$ para $0 < x < 1$; $\quad y = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-2x}$ para $x > 1$

14. $y \to 0$ cuando $x \to \infty$. Note que $a = \lambda$ y $a \neq \lambda$ deben ser considerados separadamente.

16. $y = (\frac{2}{5}x^{-1} + cx^4)^{-1/2}$

Sección 2.3, Página 41

1. *a)* $2x + 5y > 0$ ó $2x + 5y < 0$ *b)* $x^2 + y^2 < 1$
   c) En todas partes. *d)* $x + y > 0$ ó $x + y < 0$
   e) $1 - x^2 + y^2 > 0, \quad x \neq 0, y \neq 0$ o $1 - x^2 + y^2 < 0, \quad x \neq 0, y \neq 0$ *f)* En todas partes.

2. $|x| < 1$

3. $y = [2(x - \frac{7}{8})]^{-1/2}; \qquad x > \frac{7}{8}$

4. $x > -(1 - e^{-3/2})^{1/3}$

5. Para una c dada, las soluciones son válidas para $|x| < |c|/2$.
   $(0, 4)$: $\quad y = (16 - 4x^2)^{1/2}$
   $(1, -1)$: $\quad y = -(5 - 4x^2)^{1/2}$

6. *a)* $y_1(x)$ es solución para $x > 2$; $\quad y_2(x)$ es solución para toda x.
   b) f_y no es continua en $(2, -1)$.

8. *c)* $y = 3 - x$

9. *c)* $y = \dfrac{x^2}{2} + x + 1$

10. *c)* $y = e^{-x^2/2}\displaystyle\int_1^x e^{t^2/2}\,dt$

11. *c)* $y = (1 - x)e^x - 1$

12. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x; y_0) = 1$ si $y_0 < 2$; $\quad \phi(x; 2) = 2$ para toda x;
    $\phi(x; y_0) \to \infty$ cuando x se aproxima a algún valor finito si $y_0 > 2$
    b) $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x; y_0) = -1$ si $y_0 < 0$; $\quad \phi(x; 0) = 0$ para toda x;
    $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x; y_0) = 1$ si $y_0 > 0$
    c) $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x; y_0) = 0$ para cada y_0
    d) $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x; y_0) = \epsilon/\sigma$ si $y_0 > 0$; $\quad \phi(x; 0) = 0$ para toda x;
    $\phi(x; y_0) \to -\infty$ cuando x se aproxima a algún valor finito si $y_0 < 0$

Sección 2.4, Página 45

1. $3y^2 - 2x^3 = c; \qquad y \neq 0$
2. $3y^2 - 2\ln|1 + x^3| = c; \qquad 1 + x^3 \neq 0; \qquad y \neq 0$
3. $\dfrac{1}{y} + \cos x = c$ si $y \neq 0$; $\qquad$ también $y = 0$; $\qquad$ en todas partes.
4. $\arctan y - x - \dfrac{x^2}{2} = c; \qquad$ en todas partes.
5. $2\tan 2y - 2x - \operatorname{sen} 2x = c$ si $\cos 2y \neq 0$; $\qquad$ también $y = \pm\dfrac{(2n + 1)\pi}{4}$ para cualquier entero n; $\qquad$ en todas partes.
6. $y = \operatorname{sen}[\ln|x| + c]$ si $x \neq 0$ y $|y| < 1$; $\qquad$ también $y = \pm 1$; $x \neq 0$ y $|y| < 1$
7. $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c; \qquad y + e^y \neq 0$
8. $3y + y^3 - x^3 = c; \qquad$ en todas partes.
9. $y = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(3\cos^2 x), \qquad 0.95 < x < 2.19$ aproximadamente
10. $y = [2(1 - x)e^x - 1]^{1/2}, \qquad -1.68 < x < 0.77$ aproximadamente
11. $r = 2e^\theta, \qquad -\infty < \theta < \infty$
12. $y = -[2\ln(1 + x^2) + 4]^{1/2}, \qquad -\infty < x < \infty$
13. $y = [3 - 2\sqrt{1 + x^2}]^{-1/2}, \qquad |x| < \frac{1}{2}\sqrt{5}$
14. $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 15}, \qquad x > \frac{1}{2}\sqrt{15}$
15. $2y^3 - 3(\operatorname{arc\,sen} x)^2 = c$
16. $y = \dfrac{a}{c}x + \dfrac{bc - ad}{c^2}\ln|cx + d| + k; \qquad c \neq 0, \qquad cx + d \neq 0$
17. $x = \dfrac{c}{a}y + \dfrac{ad - bc}{a^2}\ln|ay + b| + k; \qquad a \neq 0, \qquad ay + b \neq 0$
18. $|y + 2x|^3\,|y - 2x| = c$
19. *a)* $y = y_0 e^{\epsilon t}$
    b) $y = \dfrac{\epsilon/\sigma}{1 + \left(\dfrac{\epsilon}{\sigma y_0} - 1\right)e^{-\epsilon t}}; \qquad y_0 \neq 0, \epsilon/\sigma$

Sección 2.5, Página 51

1. $x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$
2. No es exacta
3. $3x^3 + xy - x - 2y^2 = c$
4. $x^2y^2 + 2xy = c$
5. $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$
6. No es exacta.
7. $e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = c$; también $y = 0$
8. No es exacta.
9. $e^{xy}\cos 2x + x^2 - 3y = c$
10. $y\ln x + 3x^2 - 2y = c$
11. No es exacta.
12. $x^2 + y^2 = c$
13. *a)* $b = 3; \qquad x^2y^2 + 2x^3y = c$
    b) $b = 1; \qquad e^{2xy} + x^2 = c$
14. $\displaystyle\int^y N(x, t)\,dt + \int^x \left[M(s, y) - \int^y N_s(s, t)\,dt\right] ds = c$

Sección 2.6, Página 54

1. $x^2 + 2\ln|y| - \frac{1}{y^2} = c$; también $y = 0$
2. $e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = c$
3. $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c$
4. $\mu(x) = e^{3x}$; $(3x^2y + y^3)e^{3x} = c$
5. $\mu(x) = e^{-x}$; $y = ce^x + 1 + e^{2x}$
6. $\mu(y) = y$; $xy + y\cos y - \operatorname{sen} y = c$ también $y = 0$
7. $\mu(y) = e^{2y}/y$; $xe^{2y} - \ln|y| = c$;
8. $\mu(y) = \operatorname{sen} y$; $e^x \operatorname{sen} y + y^2 = c$
9. $\mu(x, y) = xy$; $x^3y + 3x^2 + y^3 = c$
11. $\mu(t) = \exp\int^t R(s)\,ds$, donde $t = xy$

Sección 2.7, Página 58

1. $y = cx + x\ln|x|$
2. $y = cx^2$
3. $\arctan\frac{y}{x} - \ln|x| = c$
4. $x^2 + y^2 - cx^3 = 0$
5. $|y - x| = c\,|y + 3x|^5$
6. $|y + x|\,|y + 4x|^2 = c$
7. $-\frac{2x}{x + y} = \ln c\,|x + y|$
8. $\frac{x}{x + y} + \ln|x| = c$
9. *a)* $|y - x| = c\,|y + x|^3$
   b) $|y - x + 3| = c\,|y + x + 1|^3$
10. $|y + x + 4|\,|y + 4x + 13|^2 = c$
11. $-2\frac{x - 2}{x + y - 3} = \ln c\,|x + y - 3|$
12. $x^2y^2 + 2x^3y = c$
14. *b)* Sea $z = x + \frac{b}{c}y$
15. *a)* No *b)* Sí *c)* Sí *d)* No.

Sección 2.8, Página 59

1. $y = \frac{c}{x^2} + \frac{x^3}{5}$
2. $\arctan\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = c$
3. $x^2 + xy - 3y - y^3 = 0$
4. $x = ce^y + ye^y$
5. $x^2y + xy^2 + x = c$
6. $y = \frac{1 - e^{1-x}}{x}$
7. $(x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$
8. $y = \frac{4 + \cos 2 - \cos x}{x^2}$
9. $x^2y + x + y^2 = c$
10. $\frac{y^2}{x^3} + \frac{y}{x^2} = c$
11. $\frac{x^3}{3} + xy + e^y = c$
12. $y = ce^{-x} + e^{-x}\ln(1 + e^x)$
13. $2\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} - \ln|x| = c$
14. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 34$
15. $y = \frac{c}{\cosh^2(x/2)}$
16. $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y - x}{\sqrt{3}\,x} - \ln|x| = c$
17. $y = ce^{3x} - e^{2x}$
18. $y = \frac{c}{x^2} - x$

19. $3y - 2xy^3 - 10x = 0$
20. $e^x + e^{-y} = c$
21. $e^{-y/x} + \ln|x| = c$
22. $y^3 + 3y - x^3 + 3x = 2$
23. $\frac{1}{y} = x\int^x \frac{e^{2t}}{t^2}\,dt + cx$; también $y = 0$
24. $\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y = c$
25. $\frac{x^2}{y} + \arctan\frac{y}{x} = c$
26. $x^2 + 2x^2y - y^2 = c$
27. $\operatorname{sen} x\cos 2y - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x = c$
28. $2xy + xy^3 - x^3 = c$
29. $2\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{x} - \ln|x| = c$
30. $xy^2 - \ln|y| = 0$
31. $x + \ln|x| + \frac{1}{x} + y - 2\ln|y| = c$; también $y = 0$
32. $x^3y^2 + xy^3 = -4$

Sección 2.9, Página 67

1. $t = (\ln 2)/k$ años, donde k es la tasa de interés.
2. En seis meses; cuatro millones de pesos. Después de solamente un año, su riqueza será infinita.
3. $M = 100\exp\left(-\frac{t}{20}\ln\frac{5}{4}\right)$; vida media $= \frac{20\ln 2}{\ln 5/4}$ años
4. $t = \frac{2\ln 10}{\ln 2}$ horas.
5. *a)* $k = -\frac{\ln 2}{5568} \cong -1.245 \times 10^{-4}$
   b) $Q = Q_0e^{-t\ln 2/5568} \cong Q_0e^{-(1.245\times 10^{-4})t}$
   c) $t = \frac{5568\ln 5}{\ln 2}$ años $\cong$ 12 930 años
6. $p = (2.5 \times 10^8)e^{(t\ln 10)/300}$; D.C. 2250
7. (a) $p = p_0e^{\epsilon t}$; $\lim_{t\to\infty} p = \infty$
   b) $p = \frac{p_0e^{\epsilon t}}{1 + \frac{k}{\epsilon}p_0(e^{\epsilon t} - 1)}$; $\lim_{t\to\infty} p = \frac{\epsilon}{k}$
8. *a)* $u = u_0 + (u_1 - u_0)e^{kt}$ (b) $t = \frac{\ln\frac{13}{8}}{\ln\frac{13}{12}}$ min $\cong 6.07$ min
9. $r = 3 - t$ mm, $0 < t < 3$
10. $t = 100\ln 100$ min
11. $Q = 50e^{-0.2}(1 - e^{-0.2})$ lb
12. $Q = 200 + t - \frac{100(200)^2}{(200 + t)^2}$ lb; $t < 300$
    $c = \frac{121}{125}$ lb/gal; $\lim_{t\to\infty} c = 1$ lb/gal

13. *a*) $x = pq[e^{\alpha(q-p)t} - 1]/[qe^{\alpha(q-p)t} - p]$ *b*) $x = p^2\alpha t/(p\alpha t + 1)$
14. $x = px_0/[(p - x_0)e^{-p\alpha t} + x_0]$
15. *a*) $x = 0.04(1 - e^{-t/12000})$ *b*) $t^* \cong 36$ minutos
16. *a*) $c(t) = k + (P/r) + [c_0 - k - (P/r)]e^{-rt/V}$
$\lim_{t\to\infty} c(t) = k + (P/r)$
b) $T = \frac{V}{r}\ln 2$; $T = \frac{V}{r}\ln 10$
c) Superior, $T = 430$ años; Michigan, $T = 71.4$ años; Erie, $T = 6.05$ años; Ontario, $T = 17.6$ años
17. *a*) $y^2 - x^2 = c$ *b*) $x^2 + y^2 = cy$
c) $x - y = c(x + y)^3$ *d*) $x^2 - 2cy = c^2$; $c > 0$
18. *a*) $y - 3x = c$
b) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} + \arctan(y/x) = c$, ó $r = ke^{-\theta}$
19. $y - b = c(x - a)$ 20. $(x - 2)^2 + y^2 = 9$
21. $x = cy^2$

Sección 2.10, Página 77

1. *a*) $x_m = v_0^2/2g$ *b*) $t_m = v_0/g$ *c*) $t = 2v_0/g$
2. $v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$; $\lim_{t\to\infty} v = \frac{mg}{k}$
3. $t = \frac{m}{k}\ln 10$
4. *a*) $v = 5(1 - e^{-0.2t})$ pie/seg; *b*) $\lim_{t\to\infty} v = 5$ pie/seg;
5. $2\frac{m}{k}(\sqrt{v_0} - \sqrt{v}) + 2\frac{m^2g}{k^2}\ln\left|\frac{mg - k\sqrt{v_0}}{mg - k\sqrt{v}}\right| = t$; $v_l = \left(\frac{mg}{k}\right)^2$
6. $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{kg/m}\,t} - 1}{e^{2\sqrt{kg/m}\,t} + 1}$; $\lim_{t\to\infty} v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$
7. $v_l = \left(\frac{mg}{k}\right)^{1/r}$
8. *a*) $x_m = -\frac{m^2g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right) + \frac{mv_0}{k}$ *b*) $t_m = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$
9. $v_l = \frac{2}{9}\frac{a^2g(\rho - \rho')}{\mu}$
10. *a*) $w \cong 64$ lb *b*) $w_m \cong 16.9$ lb
11. $\frac{x_m}{R} = -1 + \left(1 - \frac{v_0^2}{v_e^2}\right)^{-1} = \frac{v_0^2}{v_e^2}\left(1 + \frac{v_0^2}{v_e^2} + \frac{v_0^4}{v_e^4} + \cdots\right)$
12. $v_e = \left(\frac{2gR}{1 + \xi}\right)^{1/2}$; altitud $\cong 1536$ millas.

CAPITULO TRES

Sección 3.1, Página 97

1. *a*) $y = c_1x^{-1} + c_2 + \ln x$ *b*) $y = c_1\ln x + c_2 + x$
c) $y = \frac{1}{c_1}\ln\frac{x - c_1}{x + c_1} + c_2$
d) $y = \pm\frac{2}{3}(x - 2c_1)\sqrt{x + c_1} + c_2$; *Indicación:* $\mu(v) = v^{-3}$ como un factor integrante.
2. *a*) $y^2 = c_1x + c_2$
b) $y = c_1\,\text{sen}\,(x + c_2) = k_1\,\text{sen}\,x + k_2\cos x$
c) $\frac{y^3}{3} - 2c_1y + c_2 = 2x$ *d*) $x + c_2 = \pm\frac{2}{3}(y - 2c_1)(y + c_1)^{1/2}$
3. *a*) $y = \frac{4}{3}(x + 1)^{3/2} - \frac{1}{3}$ *b*) $y = \frac{2}{(1 - x)^2}$
c) $y = c_1\tan^{-1}x + c_2 + 3\ln x - \frac{3}{2}\ln(x^2 + 1)$
d) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$
4. *a*) Cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$
b) Cualquier intervalo
c) Cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$ ó $x = 1$
d) Cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$
e) Cualquier intervalo
f) Cualquier intervalo que no contenga a $x = (2n + 1)\pi/2$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$
5. $\phi''(0) = -p(0)a_1 - q(0)a_0$,
$\phi'''(0) = [p^2(0) - p'(0) - q(0)]a_1 + [p(0)q(0) - q'(0)]a_0$,
sí
6. *a*) $y'' - y = 0$ *b*) $y'' + y = 0$
c) $y'' = 0$ *d*) $y'' - 2y' + y = 0$
e) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ *f*) $y'' - y = 0$
g) $(1 - x\cot x)y'' - xy' + y = 0$ *h*) $y'' + 3y' = 0$

Sección 3.2, Página 104

2. $y = \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}$, $y = 0$
8. *a*) $b + cx$ *b*) $(c - a)\,\text{sen}\,x + b\cos x$
c) $(ar^2 + br + c)e^{rx}$ *d*) $ar(r - 1)x^{r-2} + brx^{r-1} + cx^r$
9. *a*) $(2a + 2b + c)x^2$ *b*) $(ar^2x^2 + brx + c)e^{rx}$
c) $[ar^2 + (b - a)r + c]x^r$
11. *a*) $(n - m)e^{(m+n)x}$ *b*) -1 *c*) x^2e^x *d*) $-e^{2x}$
e) 0
12. *a*) $-\infty < x < \infty$ *b*) $-\infty < x < \infty$
c) $-\infty < x < \infty$ *d*) $x > 0$ ó $x < 0$
13. *a*) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *b*) $y = \text{senh}\,x$
c) $y = 4e^{-2x} - 3e^{-3x}$ *d*) $y = 1 - e^{-(x-1)}$

16. Si x_1 es un punto de inflexión y $y = \phi(x)$ es una solución, entonces de la ecuación diferencial $p(x_1)\phi'(x_1) + q(x_1)\phi(x_1) = 0$.

17. *a*) Sí, $\quad y = c_1 e^{-x^2/2}\int^x e^{t^2/2}\,dt + c_2 e^{-x^2/2}$

b) No

c) Sí, $\quad y = \dfrac{1}{\mu(x)}\left[c_1\int^x \mu(t)\,dt + c_2\right]$ donde $\mu(x) = \int^x\left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{\cos t}{t}\right)dt$

d) Sí, $\quad y = c_1 x^{-1} + c_2$

18. *a*) $x^2\mu'' + 3x\mu' + (1 + x^2 - \nu^2)\mu = 0$

b) $(1 - x^2)\mu'' - 2x\mu' + \alpha(\alpha + 1)\mu = 0$

c) $\mu'' - x\mu = 0$

d) $x^2\mu'' + 2x\mu' + (-x^2 + kx + \frac{9}{4} - m^2)\mu = 0$

20. La ecuación de Legendre y la ecuación de Airy son autoadjuntas.

Sección 3.3, Página 110

5. $W(c_1y_1, c_2y_2) = c_1c_2W(y_1, y_2) \neq 0$

9. Si y_1 y y_2 son linealmente independientes, entonces $W(y_1, y_2)$ no puede cambiar de signo. Mostrar que $W(y_1, y_2)$ cambiará de signo si y_1 no tiene ninguno o más que un cero entre ceros consecutivos de y_2.

Sección 3.4, Página 113

1. $y_2(x) = e^{-2x}$
2. $y_2(x) = xe^{-x}$
3. $y_2(x) = x^{-1}, \quad x > 0$ ó $x < 0$
4. $y_2(x) = x^{-2}, \quad x > 0$ ó $x < 0$
5. $y_2(x) = \operatorname{sen} x$
6. $y_2(x) = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{3x^2 - 1}{8}\ln\dfrac{x - 1}{x + 1}$
7. $y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$
9. $y_2(x) = x^{-2}$

Sección 3.5, Página 117

1. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-3x}$
2. $y = c_1e^{-x/2} + c_2xe^{-x/2}$
3. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/3}$
4. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{x}$
5. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$
6. $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x}$
7. $y = c_1 + c_2e^{-5x}$
8. $y = c_1e^{(9+3\sqrt{5})x/2} + c_2e^{(9-3\sqrt{5})x/2}$
9. $y = c_1e^{(1+\sqrt{3})x} + c_2e^{(1-\sqrt{3})x}$
10. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$
11. $y = e^{x}$
12. $y = 2xe^{3x}$
13. $y = \frac{1}{10}e^{-9(x-1)} + \frac{9}{10}e^{x-1}$

Sección 3.5.1, Página 121

1. $y = c_1e^{x}\cos x + c_2e^{x}\operatorname{sen} x$
2. $y = c_1e^{x}\cos\sqrt{5}\,x + c_2e^{x}\operatorname{sen}\sqrt{5}\,x$
3. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-4x}$
4. $y = c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\operatorname{sen} x$
5. $y = c_1e^{x/3} + c_2xe^{x/3}$
6. $y = e^{-3x}(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x)$
7. $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$
8. $y = e^{-2x}\cos x + 2e^{-2x}\operatorname{sen} x$

14. $\pm 2^{1/4}e^{i\pi/8}; \quad \pm 2^{1/4}e^{-i\pi/8}; \quad \pm e^{i\pi/4} = \pm\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$

15. *a*) $y = c_1e^{ix} + c_2e^{-2ix} = (c_1\cos x + c_2\cos 2x) + i(c_1\operatorname{sen} x - c_2\operatorname{sen} 2x)$, no

b) $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ donde $r_1 = -1 + 2^{1/4}e^{-i\pi/8}$ y $r_2 = -1 - 2^{1/4}e^{-i\pi/8}$, no

17. *a*) Sí, $\quad y = c_1\cos z + c_2\operatorname{sen} z, \qquad z = \int^x e^{-t^2/2}\,dt$

b) No

c) Sí, $\quad y = c_1e^{-x^2/4}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + c_2e^{-x^2/4}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$

18. $y = c_1\cos\ln x + c_2\operatorname{sen}\ln x$

Sección 3.6.1, Página 131

1. $y = e^{x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - x - \frac{1}{2}$
2. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}$
3. $y = \frac{7}{10}\operatorname{sen} 2x - \frac{19}{40}\cos 2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^{x}$
4. $y = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$
5. $y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{18}(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})e^{3x} + \frac{2}{3}$
6. $y = 4xe^{x} - 3e^{x} + \frac{1}{6}x^3e^{x} + 4$
7. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-x/2} + (x^2 - 6x + 14) - \frac{3}{10}\operatorname{sen} x - \frac{9}{10}\cos x$
8. $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}x\cos 2x - \frac{5}{9}\operatorname{sen} 2x$
9. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{1}{25}e^{x}(3\cos x + 4\operatorname{sen} x)$
10. $u = c_1\cos\omega_0t + c_2\operatorname{sen}\omega_0t + \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$
11. $u = c_1\cos\omega_0t + c_2\operatorname{sen}\omega_0t + \dfrac{1}{2\omega_0}t\operatorname{sen}\omega_0t$
12. $u = e^{-\mu t/2}(c_1\cos\sqrt{4\omega_0^2 - \mu^2}\,t + c_2\operatorname{sen}\sqrt{4\omega_0^2 - \mu^2}\,t) + \dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \mu\omega\operatorname{sen}\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \mu^2\omega^2}$
13. $y = c_1e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{13}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{26}\cos 2x$
14. $y = c_1e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{15}}{2}x + c_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{15}}{2}x + \frac{1}{6}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x}$
15. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{6}xe^{2x} + \frac{1}{8}e^{-2x}$
16. $y_p(x) = x(A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4) + x(B_0x^2 + B_1x + B_2)e^{-3x} + D\operatorname{sen} 3x + E\cos 3x$
17. $y_p(x) = A_0x + A_1 + x(B_0x + B_1)\operatorname{sen} x + x(D_0x + D_1)\cos x$
18. $y_p(x) = e^{x}(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x) + (D_0x + D_1)e^{2x}\operatorname{sen} x + (E_0x + E_1)e^{2x}\cos x$
19. $y_p(x) = Ae^{-x} + x(B_0x^2 + B_1x + B_2)e^{-x}\cos x + x(D_0x^2 + D_1x + D_2)e^{-x}\operatorname{sen} x$
20. $y_p(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2 + x^2(B_0x + B_1)e^{2x} + (D_0x + D_1)\operatorname{sen} 2x + (E_0x + E_1)\cos 2x$
21. $y_p(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)\operatorname{sen} 2x + x(B_0x^2 + B_1x + B_2)\cos 2x$
22. $y_p(x) = (A_0x^2 + A_1x + A_2)e^{x}\operatorname{sen} 2x + (B_0x^2 + B_1x + B_2)e^{x}\cos 2x + e^{3x}(D\cos x + E\operatorname{sen} x) + Fe^{x}$
23. $y = c_1\cos\lambda x + c_2\operatorname{sen}\lambda x + \displaystyle\sum_{m=1}^{N}\frac{a_m}{\lambda^2 - m^2\pi^2}\operatorname{sen} m\pi x$

25. $y = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi \\ -\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen} t - \dfrac{\pi}{2} \cos t + \dfrac{\pi}{2} e^{(\pi - t)}, & t > \pi \end{cases}$

26. (i) $y_p(x) = e^{(\alpha+\beta)x}(A_0x^n + \cdots + A_n) + e^{(\alpha-\beta)x}(B_0x^n + \cdots + B_n)$
(ii) $y_p(x) = e^{(\alpha+\beta)x}(A_0x^{n+1} + \cdots + A_nx) + e^{(\alpha-\beta)x}(B_0x^n + \cdots + B_n)$
(iii) $y_p(x) = e^{(\alpha+\beta)x}(A_0x^{n+1} + \cdots + A_nx) + e^{(\alpha-\beta)x}(B_0x^{n+1} + \cdots + B_nx)$
(iv) Reemplace $e^{\beta x}$ por $\cosh \beta x + \operatorname{senh} \beta x$ y $e^{-\beta x}$ por $\cosh \beta x - \operatorname{senh} \beta x$.

Sección 3.6.2, Página 136

1. $y_p(x) = e^x$
2. $y_p(x) = -\frac{2}{3}xe^{-x}$
3. $y_p(x) = \frac{3}{2}x^2e^{-x}$
4. $y_p(x) = -(\cos x) \ln (\tan x + \sec x)$
5. $y_p(x) = (\operatorname{sen} 3x) \ln (\tan 3x + \sec 3x) - 1$
6. $y_p(x) = -e^{-2x} \ln x$
7. $y_p(x) = \frac{3}{4}(\operatorname{sen} 2x) \ln \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2}x \cos 2x$
8. $y = c_1x^{-1/2} \cos x + c_2x^{-1/2} \operatorname{sen} x - \frac{3}{2}x^{1/2} \cos x$
9. $y = c_1e^x + c_2x - \frac{1}{2}e^{-x}(2x - 1)$
10. $y_p(x) = \int^x [e^{3(x-t)} - e^{2(x-t)}]g(t)\, dt$
11. $y_p(x) = x^{-1/2} \int^x \dfrac{g(t) \operatorname{sen} (x - t)}{t^{3/2}}\, dt$
14. *a*) $y = c_1x + c_2x^2 + 4x^2 \ln x$ *b*) $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-5} + \frac{1}{12}x$

Sección 3.7.1, Página 145

1. $u = \frac{1}{4} \cos 8t$ pie, $\frac{1}{4}$ pie; 8 rad/seg, $\dfrac{\pi}{4}$ seg; t en seg
2. $u = \frac{5}{7} \operatorname{sen} 14t$ cm; t en seg,
3. $u = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{sen} 8\sqrt{2}\, t - \dfrac{1}{12} \cos 8\sqrt{2}\, t$ pie, $\dfrac{\sqrt{22}}{24}$ pie, $8\sqrt{2}$ rad/seg, $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$ seg; t en seg
5. Aproximadamente 1%
6. $c = \sqrt{10}/2$ lb seg/pie
7. $r = \sqrt{A^2 + B^2}$, $r \cos \theta = A$, $r \operatorname{sen} \theta = -B$; $R = r$; $\delta = \theta + \dfrac{(4n + 1)\pi}{2}$
$n = 0, 1, 2, \ldots$
8. $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; *a*) $u = u_0 \cos \omega_0 t$ *b*) $u = \dfrac{\dot{u}_0}{\omega_0} \cos \left(\omega_0 t - \dfrac{\pi}{2}\right)$
c) $u = \sqrt{u_0^2 + \left(\dfrac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right)^2} \cos (\omega_0 t - \delta)$. $\delta = \tan^{-1} \dfrac{\dot{u}_0/\omega_0}{u_0}$
9. $2\pi\sqrt{l/g}$
10. $u = e^{-10t}\left(2 \cos 4\sqrt{6}\, t + \dfrac{5}{\sqrt{6}} \operatorname{sen} 4\sqrt{6}\, t\right)$ cm; t en seg
11. $u = \dfrac{1}{8\sqrt{31}} e^{-2t} \operatorname{sen} 2\sqrt{31}\, t$ pie; t en seg

12. $c > 8$ lb seg/pie, sobreamortiguado;
$c = 8$ lb seg/pie, críticamente amortiguado;
$c < 8$ lb seg/pie, amortiguación periódica.
14. $\dot{u}_0 < \dfrac{-cu_0}{2m}$
15. *a*) $2\pi/\sqrt{31}$ *b*) $c = 5$ lb seg/pie

Sección 3.7.2, Página 150

1. $-2 \operatorname{sen} 8t \operatorname{sen} t$
2. $2 \operatorname{sen} \dfrac{t}{2} \cos \dfrac{13t}{2}$
3. $u = \frac{151}{1482} \cos 16t + \frac{16}{247} \cos 3t$ pie, t en seg; $\omega = 16$ rad/seg
4. $u = \frac{64}{45} (\cos 7t - \cos 8t) = \frac{128}{45} \operatorname{sen} \frac{1}{2}t \operatorname{sen} \frac{15}{2}t$ pie; t en seg
5. $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

a) $u = \left[u_0 - \dfrac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] \cos \omega_0 t + \dfrac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$

b) $u = \dfrac{\dot{u}_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t + \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$

c) $u = \left[u_0 - \dfrac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] \cos \omega_0 t + \dfrac{\dot{u}_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t + \dfrac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$

7. $u = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ (F_0/m)(t - \operatorname{sen} t), & 0 < t \le \pi \\ (F_0/m)[(2\pi - t) - 3 \operatorname{sen} t], & \pi < t \le 2\pi \\ -(4F_0/m) \operatorname{sen} t, & 2\pi < t \end{cases}$

8. $u = \frac{8}{901}(30 \cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$ pie, t en seg; $m = 4$ slugs
12. *a*) $Q = 10^{-6}(2e^{-500t} - e^{-1000t})$ coulombs; t en seg
b) $Q = 10^{-6}(1 - 500t)e^{-500t}$ coulombs; t en seg
c) $Q = 10^{-6}e^{-100t}(\cos 200t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 200t)$ coulombs; t en seg
13. $R = 10^3$ ohms.
15. $Q = \psi(t) = 10^{-6}(e^{-4000t} - 4e^{-1000t} + 3)$ coulombs; t en seg
$\psi(0.001) \cong 1.52 \times 10^{-6}$; $\psi(0.01) \cong 3 \times 10^{-6}$; $Q \to 3 \times 10^{-6}$ cuando $t \to \infty$
16. $I \cong 0.11 \cos (120\pi t + \delta)$ amperes, $\delta = \tan^{-1} \dfrac{386}{360\pi}$; t en seg
17. $\omega = 1/\sqrt{LC}$

CAPITULO CUATRO

Sección 4.1, Página 156

1. *a*) $\rho = 1$ *b*) $\rho = 2$ *c*) $\rho = \infty$
d) $\rho = \frac{1}{2}$ *e*) $\rho = \frac{1}{2}$ *f*) $\rho = 1$

2. *a*) $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\rho = \infty$ *b*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\rho = \infty$

c) $1 + (x - 1)$, $\rho = \infty$ *d*) $1 - 2(x + 1) + (x + 1)^2$, $\rho = \infty$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$, $\rho = 1$ *f*) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $\rho = 1$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\rho = 1$ *h*) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(x-2)^n$, $\rho = 1$

3. $y' = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \cdots + (n+1)^2 x^n + \cdots$

$y'' = 2^2 + 3^2 \cdot 2x + 4^2 \cdot 3x^2 + 5^2 \cdot 4x^3 + \cdots + (n+2)^2(n+1)x^n + \cdots$

4. $y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$

$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

Sección 4.2, Página 163

1. *a*) $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{senh} x$$

b) $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{n+2}$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

c) $(n+2)a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$

$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots$

$y_2(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$

d) $a_{n+4} = -\dfrac{k^2 a_n}{(n+4)(n+3)}$; $a_2 = a_3 = 0$

$$y_1(x) = 1 - \frac{k^2 x^4}{3 \cdot 4} + \frac{k^4 x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{k^6 x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (4m+3)(4m+4)}$$

$$y_2(x) = x - \frac{k^2 x^5}{4 \cdot 5} + \frac{k^4 x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{k^6 x^{13}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \cdots$$

$$= x\left[1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (4m+4)(4m+5)}\right]$$

Indicación: Sea $n = 4m$ en la relación de recurrencia, $m = 1, 2, 3, \ldots$

e) $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_{n+1} + a_n = 0$, $n \geq 1$; $a_2 = -\frac{1}{2}a_0$

$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots$

$y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \cdots$

f) $a_{n+2} = -\dfrac{(n^2 - 2n + 4)a_n}{2(n+1)(n+2)}$, $n \geq 2$; $a_2 = -a_0$, $a_3 = -\frac{1}{4}a_1$

$y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \cdots$

$y_2(x) = x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{160}x^5 - \frac{19}{1920}x^7 + \cdots$

2. $y(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{3 \cdot 5} + \dfrac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n n!\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \frac{1}{18}(x-1)^6 + \cdots$

$y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5 - \frac{1}{28}(x-1)^7 + \cdots$

Sección 4.2.1, Página 169

1. *a*) $\phi''(0) = -1$, $\phi'''(0) = 0$, $\phi^{iv}(0) = 3$

b) $\phi''(0) = 0$, $\phi'''(0) = -2$, $\phi^{iv}(0) = 0$

c) $\phi''(1) = 0$, $\phi'''(1) = -6$, $\phi^{iv}(1) = 42$

d) $\phi''(0) = 0$, $\phi'''(0) = -a_0$, $\phi^{iv}(0) = -4a_1$

2. *a*) $\rho = \infty$, $\rho = \infty$ *b*) $\rho = 1$, $\rho = 3$, $\rho = 1$

c) $\rho = 1$, $\rho = \sqrt{3}$ *d*) $\rho = 1$

3. *a*) $\rho = \infty$ *b*) $\rho = \infty$ *c*) $\rho = \infty$

d) $\rho = \infty$ *e*) $\rho = 1$ *f*) $\rho = \sqrt{2}$

4. *a*) $$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}x^2 - \frac{(2^2 - \alpha^2)\alpha^2}{4!}x^4 - \frac{(4^2-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{6!}x^6 - \cdots$$

$$- \frac{[(2m)^2 - \alpha^2]\cdots(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{(2m)!}x^{2m} - \cdots$$

$$y_2(x) = x + \frac{1-\alpha^2}{3!}x^3 + \frac{(3^2-\alpha^2)(1-\alpha^2)}{5!}x^5 + \cdots$$

$$+ \frac{[(2m+1)^2 - \alpha^2]\cdots(1-\alpha^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

b) $y_1(x)$ o $y_2(x)$ termina con x^n cuando $\alpha = n$ es par o non.

c) $n = 0$, $y = 1$; $n = 1$, $y = x$; $n = 2$, $y = 1 - 2x^2$; $n = 3$, $y = x - \frac{4}{3}x^3$

5. $y_1(x) = 1 - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots$

$y_2(x) = x - \dfrac{x^4}{3 \cdot 4} + \dfrac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots$

6. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots, \qquad y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots$
   $\rho = \infty$
7. No se puede especificar arbitrariamente las condiciones iniciales en $x = 0$; de aquí $x = 0$ debe ser un punto singular.
8. $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{-1/h^2} - 0}{h} = 0, \qquad f''(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(2/h^3)e^{-1/h^2} - 0}{h} = 0, \qquad$ etc.
9. *a*) $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$

   b) $y = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \cdots$

   c) $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots$

   d) $y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \dfrac{1}{1 - x}$

   e) $$y = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) + 2!\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$
   $$= a_0 e^x + 2\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) = ce^x - 2 - 2x - x^2$$

   f) $$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + \cdots\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + \cdots\right)$$
   $$= a_0 e^{-x^2/2} + \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + \cdots\right)$$

Sección 4.3, Página 175

	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
1.	ordinario	singular regular	ordinario
2.	singular regular	singular regular	singular regular
3.	singular regular	singular irregular	singular regular
4.	singular regular	singular irregular	singular regular
5.	singular irregular	ordinario	singular regular
6.	ordinario	ordinario	singular irregular
7.	ordinario	ordinario	ordinario
8.	singular regular	singular regular	singular irregular

11. *a*) punto singular regular — *b*) punto singular irregular
    c) punto singular irregular — *d*) punto singular irregular

Sección 4.4, Página 181

1. *a*) $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2}$ — *b*) $y = c_1|x|^{-1/2} + c_2|x|^{-3/2}$
   c) $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln|x|$

   d) $y = c_1x^{-1}\cos(2\ln|x|) + c_2x^{-1}\,\mathrm{sen}\,(2\ln|x|)$
   e) $y = c_1x + c_2x\ln|x|$ — *f*) $y = c_1(x-1)^{-3} + c_2(x-1)^{-4}$
   g) $y = c_1|x|^{(-5+\sqrt{29})/2} + c_2|x|^{(-5-\sqrt{29})/2}$
   h) $y = c_1|x|^{3/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right) + c_2|x|^{3/2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)$
   i) $y = c_1x^3 + c_2x^3\ln|x|$
   j) $y = c_1(x-2)^{-2}\cos(2\ln|x-2|) + c_2(x-2)^{-2}\,\mathrm{sen}\,(2\ln|x-2|)$
   k) $y = c_1|x|^{-1/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\ln|x|\right) + c_2|x|^{-1/2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\ln|x|\right)$
   l) $y = c_1x + c_2x^4$
3. $\alpha < 1$
5. *a*) $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$ — *b*) $y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x + \frac{1}{4}\ln x + \frac{1}{4}$
   c) $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-5} + \frac{1}{12}x$ — *d*) $y = c_1x + c_2x^2 + x^2\ln x + \ln x + \frac{3}{2}$
   e) $y = c_1\cos(2\ln x) + c_2\,\mathrm{sen}\,(2\ln x) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(\ln x)$
   f) $y = c_1x^{-3/2}\cos(\frac{3}{2}\ln x) + c_2x^{-3/2}\,\mathrm{sen}\,(\frac{3}{2}\ln x)$

Sección 4.5, Página 186

1. *a*) $r(2r-1) = 0; \qquad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[2(n+r)-1]}; \qquad r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 0$
   $$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!\,5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)} + \cdots\right]$$
   $$y_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 7\cdot 11} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!\,3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)} + \cdots$$
   b) $r^2 - \frac{1}{9} = 0; \qquad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{[(n+r)^2 - \frac{1}{9}]}; \qquad r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = -\frac{1}{3}$
   $$y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{1!\,(1+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\,(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!\,(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\cdots(m+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$$
   $$y_2(x) = x^{-1/3}\left[1 - \frac{1}{1!\,(1-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\,(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!\,(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})\cdots(m-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$$
   Indicación: Sea $n = 2m$ en la relación de recurrencia, $m = 1, 2, 3, \ldots$
   c) $r(r-1) = 0; \qquad a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)}; \qquad r_1 = 1, r_2 = 0$
   $$y_1(x) = x\left[1 - \frac{x}{1!\,2!} + \frac{x^2}{2!\,3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}x^n + \cdots\right]$$

d) $r^2 = 0; \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{(n+r)^2}; \qquad r_1 = r_2 = 0$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \cdots + \frac{x^n}{(n!)^2} + \cdots$$

e) $r(3r-1) = 0; \qquad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[3(n+r)-1]}; \qquad r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = 0$

$$y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{1!\,7}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!\,7\cdot 13}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!\,7\cdot 13\cdots(6m+1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = 1 - \frac{1}{1!\,5}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!\,5\cdot 11}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!\,5\cdot 11\cdots(6m-1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots$$

Indicación: Sea $n = 2m$ en la relación de recurrencia, $m = 1, 2, 3, \ldots$

f) $r^2 - 2 = 0; \qquad a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{[(n+r)^2 - 2]}; \qquad r_1 = \sqrt{2}, r_2 = -\sqrt{2}$

$$y_1(x) = x^{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{x}{1(1+2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!\,(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!\,(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})\cdots(n+2\sqrt{2})}x^n + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = x^{-\sqrt{2}}\left[1 - \frac{x}{1(1-2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!\,(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!\,(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})\cdots(n-2\sqrt{2})}x^n + \cdots\right]$$

2. $r^2 = 0; \qquad r_1 = 0, r_2 = 0$

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2\cdot 1^2}(x-1) - \frac{\alpha(\alpha+1)[1\cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]}{(2\cdot 1^2)(2\cdot 2^2)}(x-1)^2 + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{\alpha(\alpha+1)[1\cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]\cdots[n(n-1) - \alpha(\alpha+1)]}{2^n(n!)^2}(x-1)^n + \cdots$$

3. $r^2 = 0; \qquad r_1 = 0, r_2 = 0; \qquad a_n = \dfrac{(n-1-\lambda)a_{n-1}}{n^2}$

$$y_1(x) = 1 + \frac{-\lambda}{(1!)^2}x + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2}x^n + \cdots$$

Para $\lambda = n$, los coeficientes de todos los términos, después de x^n son cero.

6. b) $[(n-1)^2 - 1]b_n = -b_{n-2}$, y es imposible determinar b_2.

Sección 4.5.1, Página 192

1. a) $x = 0; \quad r(r-1) = 0; \quad r_1 = 1, r_2 = 0$
   b) $x = 0; \quad r^2 - 3r + 2 = 0; \quad r_1 = 2, r_2 = 1$
   c) $x = 0; \quad r(r-1) = 0; \quad r_1 = 1, r_2 = 0$
   $x = 1; \quad r(r+5) = 0; \quad r_1 = 0, r_2 = -5$
   d) ninguno
   e) $x = 0; \quad r^2 + 2r - 2 = 0; \quad r_1 = -1 + \sqrt{3}, r_2 = -1 - \sqrt{3}$
   f) $x = 0; \quad r(r - \frac{3}{4}) = 0; \quad r_1 = \frac{3}{4}, r_2 = 0$
   $x = -2; \quad r(r - \frac{5}{4}) = 0; \quad r_1 = \frac{5}{4}, r_2 = 0$
   g) $x = 0; \quad r^2 + 1 = 0; \quad r_1 = i, r_2 = -i$
   h) $x = -1; \quad r^2 - r + 3 = 0; \quad r_1 = \frac{3}{2}, r_2 = -\frac{1}{2}$

2. $y_1(x) = x - \dfrac{x^3}{24} - \dfrac{25}{456}x^5 + \cdots$

3. $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 0$
   $y_1(x) = (x-1)^{1/2}[1 - \frac{7}{12}(x-1) + \frac{43}{480}(x-1)^2 + \cdots], \qquad \rho = 1$

4. c) *Indicación:* $(n-1)(n-2) + (1+\alpha+\beta)(n-1) + \alpha\beta = (n-1+\alpha)(n-1+\beta)$
   d) *Indicación:* $(n-\gamma)(n-1-\gamma) + (1+\alpha+\beta)(n-\gamma) + \alpha\beta = (n-\gamma+\alpha)(n-\gamma+\beta)$

Sección 4.6, Página 202

1. a) $y_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!\,(n+1)!}$,

$$y_2(x) = -y_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n + H_{n-1}}{n!\,(n-1)!}(-1)^n x^n\right]$$

b) $y_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}, \qquad y_2(x) = y_1(x)\ln x - \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2}x^n$

c) $y_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2}x^n, \qquad y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n H_n}{(n!)^2}x^n$

d) $y_1(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!\,(n+1)!}x^n$,

$$y_2(x) = -2y_1(x)\ln x + \frac{1}{x^2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n + H_{n-1}}{n!\,(n-1)!}(-1)^n 2^n x^n\right]$$

2. $y_1(x) = x^{3/2}\left[1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(1+\frac{3}{2})(2+\frac{3}{2})\cdots(m+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$

$$y_2(x) = x^{-3/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m}{m!\,(1-\frac{3}{2})(2-\frac{3}{2})\cdots(m-\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]\right]$$

Indicación: Sea $n = 2m$ en la relación de recurrencia, $m = 1, 2, 3, \ldots$ Para $r = -\frac{3}{2}$, $a_1 = 0$ y a_3 es arbitraria.

CAPITULO CINCO

Sección 5.1, Página 206

1. $\phi^{(n)}(0) = -p_1(0)y_0^{(n-1)} - \cdots - p_n(0)y_0$
   $\phi^{(n+1)}(0) = p_1(0)[p_1(0)y_0^{(n-1)} + \cdots + p_n(0)y_0] - p_1'(0)y_0^{(n-1)} - \cdots$
   $- p_n(0)y_0' - p_n'(0)y_0$
2. *a*) $y''' = -\cos x$ *b*) $y''' + y' = 0$
   c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ *d*) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$
   e) $y''' + y' = 1$ *f*) $y^{\text{iv}} - y'' = 0$
3. *a*) $-\infty < x < \infty$ *b*) $x > 0$ ó $x < 0$
   c) $x < 1$, ó $0 < x < 1$, ó $x < 0$ *d*) $x > 0$

Sección 5.2, Página 209

4. *a*) 1 *b*) 1 *c*) $-6e^{-2x}$
   d) e^{-2x} *e*) $6x$
5. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{10}(5) - \frac{1}{2}\cos 2x$
6. *a*) $a_0[n(n-1)(n-2)\cdots 1] + a_1[n(n-1)\cdots 2]x + \cdots + a_nx^n$
   b) $(a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n)e^{rx}$
   c) $e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}$; sí, $W(e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}) \neq 0$, $-\infty < x < \infty$
8. *a*) $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$
   b) $y = c_1x^2 + c_2x^3 + c_3(x + 1)$

Sección 5.3, Página 216

1. *a*) $\sqrt{2}e^{i[(\pi/4)+2m\pi]}$ *b*) $2e^{i[(2\pi/3)+2m\pi]}$
   c) $e^{i(\pi+2m\pi)}$ *d*) $e^{i[(3\pi/2)+2m\pi]}$
   e) $2e^{i[(11\pi/6)+2m\pi]}$ *f*) $\sqrt{2}e^{i[(5\pi/4)+2m\pi]}$
2. *a*) $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ *b*) $2^{1/4}e^{-\pi i/8}, 2^{1/4}e^{7\pi i/8}$
   c) $1, i, -1, -i$ *d*) $(\sqrt{3} + i)/\sqrt{2}, -(\sqrt{3} + i)/\sqrt{2}$
3. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x}$ 4. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$
5. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-x}$ 6. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x}$
7. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + e^{\sqrt{3}x/2}\left(c_3 \cos \frac{x}{2} + c_4 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)$
   $+ e^{-\sqrt{3}x/2}\left(c_5 \cos \frac{x}{2} + c_6 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)$
8. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x}$
9. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4e^{-x} + c_5xe^{-x} + c_6x^2e^{-x}$
10. $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x} + c_5 \cos x + c_6 \operatorname{sen} x$
11. $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x$
12. $y = c_1 + c_2e^{2x} + e^{-x}(c_3 \cos \sqrt{3}\,x + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}\,x)$
13. $y = e^x[(c_1 + c_2x) \cos x + (c_3 + c_4x) \operatorname{sen} x]$
    $+ e^{-x}[(c_5 + c_6x) \cos x + (c_7 + c_8x) \operatorname{sen} x]$
14. $y = 2 - 2\cos x + \operatorname{sen} x$
15. $y = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x) + \frac{1}{2}(\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x)$

17. *a*) $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-1}$ *b*) $y = c_1x + c_2x \ln x + c_3x(\ln x)^2$
    c) $y = c_1x + c_2 \cos(\ln x) + c_3 \operatorname{sen}(\ln x)$
20. *a*) Asintóticamente estable *b*) No asintóticamente estable
    c) No asintóticamente estable *d*) No asintóticamente estable
    e) No asintóticamente estable *f*) Asintóticamente estable.

Sección 5.4, Página 221

1. $y = \frac{3}{16}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{8}x^2$
2. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} + 3$
3. $y = c_1e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}xe^{-x} + 4(x - 1)$
4. $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} \cos x$
5. $y = (x - 4)\cos x - (\frac{3}{2}x + 4)\operatorname{sen} x + 3x + 4$
6. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4e^{2x} - \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{16}x^2$
7. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x + 3 + \frac{1}{25}\cos 2x$
8. $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 + 3x) - xe^x$
9. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + e^{x/2}\left(c_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{x^4}{24}$
10. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{40}\cos 2x$
11. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x - 3x - \frac{1}{4}x \operatorname{sen} x$
12. $y_p(x) = x(A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3) + Bx^2e^x$
13. $y_p(x) = x(A_0x + A_1)e^{-x} + B\cos x + C\operatorname{sen} x$
14. $y_p(x) = Ax^2e^x + B\cos x + C\operatorname{sen} x$
15. $y_p(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2) + (B_0x + B_1)\cos x + (C_0x + C_1)\operatorname{sen} x$
16. $y_p(x) = Ax^2 + (B_0x + B_1)e^x + x(C\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x)$
17. $y_p(x) = Ae^x + (B_0x + B_1)e^{-x} + xe^{-x}(C\cos x + D\operatorname{sen} x)$
18. $t_0 = a_0$, $t_n = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n$

Sección 5.5, Página 224

1. $y_p(x) = -\ln \cos x - (\operatorname{sen} x)\ln(\sec x + \tan x)$
2. $y_p(x) = -x^2/2$ 3. $y_p(x) = e^{4x}/30$ 4. $y_p(x) = x^4/15$
5. $y_p(x) = \frac{1}{2}\int^x [e^{x-t} - \operatorname{sen}(x - t) - \cos(x - t)]g(t)\,dt$
6. $y_p(x) = \frac{1}{2}\int^x [\operatorname{senh}(x - t) - \operatorname{sen}(x - t)]g(t)\,dt$
7. $y_p(x) = \frac{1}{2}\int^x \left(\frac{x}{t^2} - 2\frac{x^2}{t^3} + \frac{x^3}{t^4}\right)g(t)\,dt$

CAPITULO SEIS

Sección 6.1, Página 230

2. $x_1' - x_2 = 0$, $x_1(0) = u_0$
   $x_2' + p(t)x_2 + q(t)x_1 = g(t)$, $x_2(0) = u_0'$

Sección 6.2, Página 235

1. $x_1 = c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}$
   $x_2 = -4c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}$
2. $x_1 = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} + \frac{1}{4}e^t$
   $x_2 = 2c_1e^{3t} - 2c_2e^{-t} - 2e^t$
3. $x_1 = -\frac{2}{3}\cos t - \frac{4}{3}\operatorname{sen} t + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 2t + \frac{8}{3}\cos 2t - 5t$
   $x_2 = -\frac{2}{3}\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t - 2t + 1$

4. $x_1 = c_1e^{2t} + c_2(t-1)e^{2t} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}t^2$
   $x_2 = -c_1e^{2t} - c_2te^{2t} - \frac{3}{8} - t - \frac{1}{4}t^2$
5. $x_1 = e^t + 7te^t + 3t^2e^t$
   $x_2 = -e^t + 2te^t + \frac{3}{2}t^2e^t$
6. $x_1 = c_1 + c_2t + \frac{4}{3}t^3$
   $x_2 = 2c_1 + c_2(2t - \frac{1}{2}) + t - 2t^2 + \frac{8}{3}t^3$
7. $x_1 = c_1e^t\cos 2t + c_2e^t \operatorname{sen} 2t + \frac{4}{13}e^{-t}\operatorname{sen} t - \frac{7}{13}e^{-t}\cos t$
   $x_2 = c_1e^t(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t) + c_2e^t(-\cos 2t + \operatorname{sen} 2t) - \frac{2}{13}e^{-t}\operatorname{sen} t - \frac{16}{13}e^{-t}\cos t$
8. $x_1 = e^{-2t}\cos t + 3e^{-2t}\operatorname{sen} t$
   $x_2 = 2e^{-2t}\operatorname{sen} t$
9. $x_1 = c_2e^t$
   $x_2 = -\sqrt{2}c_1e^{-2t} + c_3e^t$
   $x_3 = c_1e^{-2t} + \sqrt{2}c_3e^t$
10. $x_1 = c_1e^t + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$
    $x_2 = -4c_1e^t - c_2e^{-2t} + 2c_3e^{3t}$
    $x_3 = -c_1e^t - c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$
11. $x_1 = 4c_1e^{-2t} + 3c_2e^{-t}$
    $x_2 = -5c_1e^{-2t} - 4c_2e^{-t} + c_3e^{2t}$
    $x_3 = -7c_1e^{-2t} - 2c_2e^{-t} - c_3e^{2t}$
13. $x_1 = c_1 + 2c_2e^t + c_3e^{2t}$
    $x_2 = 2c_1 + c_2e^t$
14. $x_1 = c_1e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{5}{4}$
    $x_2 = -\frac{3}{2}c_1e^{-2t} + c_2 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t$
15. $x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + 3c_3e^{4t} + \frac{1}{4}$
    $x_2 = 3c_1e^{-t} - c_3e^{4t} + \frac{1}{4}$
16. $x_1 = -\cos t - \operatorname{sen} t$
    $x_2 = -\operatorname{sen} t$
17. $x_1 = c_1e^{2t}$
    $x_2 = c_2e^{-2t}$
18. No hay soluciones.
19. Número infinito de soluciones; x_1 es arbitrario; $x_2 = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) - x_1$
20. No tiene soluciones
21. Número infinito de soluciones: cualquier solución de $(D+1)x_1 + Dx_2 = 0$

Sección 6.3, Página 245

1. *a*) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \\ -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} -7 & -6 & 4 \\ 11 & -10 & -13 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -7 \\ 1 & 9 & 1 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 1 & 10 & 6 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

2. *a*) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *c*), *d*) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 2 & 10 & 4 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

4. *a*) $\begin{pmatrix} 7 & -11 & -3 \\ 11 & 20 & 17 \\ -4 & 3 & -12 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 6 & -8 & -11 \\ 9 & 15 & 6 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

6. $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{7}{3}, x_3 = -\frac{1}{3}$
7. No tiene solución
8. $x_1 = -c, x_2 = c+1, x_3 = c$, donde c es arbitraria
9. $x_1 = c, x_2 = -c, x_3 = -c$, donde c es arbitraria
10. $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
11. *a*) Linealmente independiente *b*) $\mathbf{x}^{(1)} - 5\mathbf{x}^{(2)} + 2\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$
    c) $2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} + 4\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$
    d) Linealmente independiente. *e*) $\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$

13. $\lambda_1 = 2, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 4, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14. $\lambda_1 = 1 + 2i, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1 - 2i, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

15. $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

16. $\lambda_1 = 1, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -2, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 3, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

17. $\lambda_1 = 1, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1 + 2i, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$;

    $\lambda_3 = 1 - 2i, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

18. $\lambda_1 = 2, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

19. $\lambda_1 = 1, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 3, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

20. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

21. $\lambda_1 = -1, \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 8, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

23. *a*) $\begin{pmatrix} 7e^t & 5e^{-t} & 10e^{2t} \\ -e^t & 7e^{-t} & 2e^{2t} \\ 8e^t & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} 2e^{2t} - 2 + 3e^{3t} & 1 + 4e^{-2t} - e^t & 3e^{3t} + 2e^t - e^{4t} \\ 4e^{2t} - 1 - 3e^{3t} & 2 + 2e^{-2t} + e^t & 6e^{3t} + e^t + e^{4t} \\ -2e^{2t} - 3 + 6e^{3t} & -1 + 6e^{-2t} - 2e^t & -3e^{3t} + 3e^t - 2e^{4t} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} e^t & -2e^{-t} & 2e^{2t} \\ 2e^t & -e^{-t} & -2e^{2t} \\ -e^t & -3e^{-t} & 4e^{2t} \end{pmatrix}$ d) $(e-1)\begin{pmatrix} 1 & 2/e & \dfrac{e+1}{2} \\ 2 & 1/e & -\dfrac{e+1}{2} \\ -1 & 3/e & e+1 \end{pmatrix}$

24. a) $3\mathbf{x}^{(1)}(t) - 6\mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{x}^{(3)}(t) = \mathbf{0}$ b) Linealmente independiente.

Sección 6.4, Página 253

2. c) $W(t) = c \exp\,[p_{11}(t) + p_{22}(t)]$

5. b) $u_1'(t) = \dfrac{W(\mathbf{g}, \mathbf{x}^{(2)})(t)}{W(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})(t)}$, $\quad u_2'(t) = \dfrac{W(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{g})(t)}{W(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})(t)}$

6. a) $W(t) = t^2$
 b) $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son linealmente independientes en cada punto excepto para $t = 0$; son linealmente independientes sobre cualquier intervalo.
 c) Al menos algún coeficiente debe ser discontinuo en $t = 0$.
 d) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{2}{t^2} & \dfrac{2}{t} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. a) $W(t) = t(t-2)e^t$
 b) $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son linealmente independientes en cada punto excepto en $t = 0$ y $t = 2$; son linealmente independientes sobre cualquier intervalo.
 c) Debe haber al menos un coeficiente discontinuo en $t = 0$ y $t = 2$.
 d) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2-2t}{t^2-2t} & \dfrac{t^2-2}{t^2-2t} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Sección 6.5, Página 258

1. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{2t}$ 2. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-2t}$

3. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t}$ 4. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t}$

5. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}4\\-5\\-7\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}e^{3t}$

7. $\mathbf{x} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{2t} + \frac{7}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{4t}$ 8. $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}e^{3t}$

9. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}e^{t} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t}$

10. $\mathbf{x} = \frac{62}{17}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}e^{t} + \frac{27}{17}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-t} + \frac{15}{17}\begin{pmatrix}2\\1\\-8\end{pmatrix}e^{4t}$

12. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}t^{-1}$ 13. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}t^{2} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t^{4}$

14. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t^{-2}$ 15. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t^{-1} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}t^{2}$

16. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{t} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

17. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-2t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{t}$

Sección 6.6, Página 267

1. $\mathbf{x} = c_1e^{t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t + \operatorname{sen} 2t\end{pmatrix} + c_2e^{t}\begin{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\\ -\cos 2t + \operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x} = c_1e^{-t}\begin{pmatrix}\cos \sqrt{2}\,t\\ \sqrt{2}\operatorname{sen} \sqrt{2}\,t\end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix}\operatorname{sen} \sqrt{2}\,t\\ -\sqrt{2}\cos \sqrt{2}\,t\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}5\cos t\\ 2\cos t + \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}5\operatorname{sen} t\\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t\end{pmatrix}$

4. $\mathbf{x} = c_1e^{t/2}\begin{pmatrix}5\cos \frac{3}{2}t\\ 3(\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t)\end{pmatrix} + c_2e^{t/2}\begin{pmatrix}5\operatorname{sen} \frac{3}{2}t\\ 3(-\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t)\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}e^{t} + c_2e^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2t\\ \operatorname{sen} 2t\end{pmatrix} + c_3e^{t}\begin{pmatrix}0\\ \operatorname{sen} 2t\\ -\cos 2t\end{pmatrix}$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\\ \cos\sqrt{2}\,t\\ -\cos\sqrt{2}\,t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\end{pmatrix}$
$\quad + c_3e^{-t}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,t\\ \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,t - \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\end{pmatrix}$

7. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{t}\right]$

8. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right]$

9. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}\right]$

10. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$

11. $\mathbf{x} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t - 3\,\mathrm{sen}\,t \\ \cos t - \mathrm{sen}\,t \end{pmatrix}$ 12. $\mathbf{x} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos t - 5\,\mathrm{sen}\,t \\ -2\cos t - 3\,\mathrm{sen}\,t \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ 2 + 4t \end{pmatrix}e^{-3t}$ 14. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -33 \end{pmatrix}e^{t} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}te^{t} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

15. $\mathbf{x} = \frac{1}{5}(2t - \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,2t - \frac{1}{2}\cos 2t + c_1)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}\,t \end{pmatrix}$
$+ \frac{1}{5}(-t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2t + \frac{3}{2}\cos 2t + c_2)\begin{pmatrix} 5\,\mathrm{sen}\,t \\ -\cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ln t + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}t^{-1} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}t^{-2}$

17. $\mathbf{x} = (-\mathrm{sen}\,t + c_1)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}\,t \end{pmatrix}$
$+ \left(-\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| - \cos t + c_2\right)\begin{pmatrix} 5\,\mathrm{sen}\,t \\ -\cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{x} = c_1 t^{-1}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\ln t) \\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix} + c_2 t^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\sqrt{2}\ln t) \\ -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 5\cos(\ln t) \\ 2\cos(\ln t) + \mathrm{sen}(\ln t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5\,\mathrm{sen}(\ln t) \\ -\cos(\ln t) + 2\,\mathrm{sen}(\ln t) \end{pmatrix}$

20. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t\ln t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t\right]$

21. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^{-3} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^{-3}\ln t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}t^{-3}\right]$

22. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}\right]$
$+ c_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}t^2e^{2t} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}te^{2t} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}\right]$

CAPITULO SIETE

Sección 7.2, Página 279

1. *a*) $y = \phi(x) = (1 + e^{2x})/2$; 1.111, 1.246, 1.411, 1.613
   b) 1.1, 1.22, 1.364, 1.537 *c*) 1.05, 1.105, 1.166, 1.233

2. *a*) $y = \phi(x) = e^{2x} + \frac{1}{2}x$; 1.271, 1.592, 1.972, 2.425
   b) 1.25, 1.54, 1.878, 2.274 *c*) 1.125, 1.260, 1.406, 1.564
3. *a*) 1.1, 1.222, 1.375, 1.573 *b*) 1.05, 1.105, 1.167, 1.236
4. $y_6 = 8.903824$, $y_7 = 12.505354$
5. 1.595, 2.464
8. *a*) $\phi_3(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3$; $\phi_2(0.4) = 1.56$, $\phi_3(0.4) = 1.603$
   b) $\phi_3(x) = 1 + \frac{5}{2}x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$; $\phi_2(0.4) = 2.299$, $\phi_3(0.4) = 2.401$
   c) $\phi_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$; $\phi_2(0.4) = 1.608$

Sección 7.3, Página 286

1. $e_{n+1} = [2\phi(\bar{x}_n) - 1]h^2$, $|e_{n+1}| \le \left[1 + 2\max_{0\le x\le 1}|\phi(x)|\right]h^2$,
   $e_{n+1} = e^{2\bar{x}_n}h^2$, $|e_1| \le 0.012$, $|e_4| \le 0.022$
2. $e_{n+1} = [2\phi(\bar{x}_n) - \bar{x}_n]h^2$, $|e_{n+1}| \le \left[1 + 2\max_{0\le x\le 1}|\phi(x)|\right]h^2$,
   $e_{n+1} = 2e^{2\bar{x}_n}h^2$, $|e_1| \le 0.024$, $|e_4| \le 0.044$
3. $e_{n+1} = [\bar{x}_n + \bar{x}_n{}^2\phi(\bar{x}_n) + \phi^3(\bar{x}_n)]h^2$
4. *a*) $\phi(x) = 1 + \frac{1}{5\pi}\,\mathrm{sen}\,5\pi x$ *b*) 1.2, 1.0, 1.2
   c) 1.1, 1.1, 1.0, 1.0 *d*) $h < \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \cong 0.08$
7. *a*) $y_1(h = 0.2) = 1.4$, $y_2(h = 0.1) = 1.44$; $\phi(0.2) \cong 1.48$, exacto 1.4918
   b) $y_1(h = 0.2) = 1.2$, $y_2(h = 0.1) = 1.22$; $\phi(0.2) \cong 1.24$, exacto 1.246
   c) $y_1(h = 0.2) = 1.5$, $y_2(h = 0.1) = 1.54$; $\phi(0.2) \cong 1.58$, exacto 1.592
   d) $y_1(h = 0.2) = 1.2$, $y_2(h = 0.1) = 1.222$; $\phi(0.2) \cong 1.244$
9. *a*) 56.75310 *b*) 62.027322
10. *a*) 1.05, 1.11, 1.17, 1.24 *b*) 1.13, 1.27, 1.42, 1.58
    c) 1.05, 1.11, 1.17, 1.24
11. *a*) 0 *b*) 60 *c*) −92.16
12. $0.224 \neq 0.225$
13. *b*) $\phi_2(x) - \phi_1(x) = 0.001e^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$

Sección 7.4, Página 292

1. 1.110, 1.244, 1.408 2. 1.270, 1.589, 1.967
3. 1.111, 1.252, 1.437
5. $e_{n+1} = 304e^{4\bar{x}_n}(h^3/9)$, $|e_{n+1}| \le 205h^3$ en $0 \le x \le 1$, $|e_1| \le 0.0504$
6. *a*) $e_{n+1} = 2e^{2\bar{x}_n}(h^3/3)$, $|e_{n+1}| \le 4.96h^3$ en $0 \le x \le 1$, $|e_1| \le 0.00081$
   b) $e_{n+1} = 4e^{2\bar{x}_n}(h^3/3)$, $|e_{n+1}| \le 9.92h^3$ en $0 \le x \le 1$, $|e_1| \le 0.0016$
8. *a*) 1.110, 1.244, 1.408 *b*) 1.270, 1.588, 1.965
   c) 1.110, 1.250, 1.433

Sección 7.5, Página 295

1. 1.110, 1.244, 1.408 2. 1.270, 1.588, 1.966
3. 1.110, 1.249, 1.431 4. $y_2 = 2.464$, $y_3 = 3.738$
7. *a*) $y_1(h = 0.2) = 1.240$, $y_2(h = 0.1) = 1.244$;
   $\phi(0.2) \cong 1.245$, exacto 1.246

b) $y_1(h = 0.2) = 1.580$, $y_2(h = 0.1) = 1.588$;
$\phi(0.2) \cong 1.591$, exacto 1.592
c) $y_1(h = 0.2) = 1.240$, $y_2(h = 0.1) = 1.249$;
$\phi(0.2) \cong 1.252$

8. $\phi(1) \cong 64.586856$, exacto 64.897803

Sección 7.6, Página 299

1. 1.249, 1.598
2. 1.590, 2.423
3. 1.251, 1.698
7. $\phi(1) \cong 64.885876$, exacto 64.897803

INDICE

F

H

I

L

M

O

P

Libros afines:

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
Carlos Imaz y Zdenek Vorel

Al escribir este libro, los autores quisieron presentar una parte del panorama moderno de la [illegible] diferenciales ordinarias, tenien- [illegible] plio público lector interesado [illegible] tanto una obra introductoria [illegible] ción exclusiva de un tema [illegible] r una idea general de la [illegible] y aplicaciones de la teoría.

[illegible] nte elemental, en el [illegible] r lo que usualmente [illegible] o. [illegible] arte de ser una obra [illegible] de [illegible] plearse para planear [illegible] la licenciatura en [illegible] año de graduados.

[illegible] DIF[illegible]NCIALES
[illegible] LORES EN LA FRONTERA
[illegible] Richard C. DiPrima

[illegible] ático de este libro está [illegible] y por consiguiente fácil [illegible] senta en forma clara y [illegible] ferenciales.

[illegible] ias entre ecuaciones linea- [illegible] e problemas con valores [illegible] la frontera; incluye abun- [illegible] e con detalle numerosas [illegible] a. El libro plantea 900 [illegible] ciles con sus respuestas [illegible] distribución de los temas resulta de gran flexibilidad para usarlo, en cursos introductor[illegible] de nivel más avanzado que se imparte[illegible] todas las carreras de Ingeniería y Ciencias. [illegible]emás, los autores consideran que esta obra se [illegible] tanto para la autoinstrucción como para la enseñanza.

Según las palabras de los autores, este libro aborda el tema "desde el punto de vista del que se dedica a las matemáticas aplicadas, y se interesa en las ecuaciones diferenciales tanto en el aspecto puramente teórico como en el práctico. Por lo tanto se ha intentado combinar una exposición precisa —pero no particularmente abstracta— de la teoría elemental de ecuaciones diferenciales, con una introducción a algunos de los métodos de solución de utilidad probada en muchas aplicaciones."

La obra se puede usar para un curso semestral de ecuaciones diferenciales, o como texto auxiliar en un curso de cálculo o en uno que incluya cálculo, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales. Los autores tratan los aspectos esenciales de las ecuaciones lineales en un estilo claro y preciso. Se ha tenido cuidado de relacionar los diferentes temas de la materia y, siempre que se puede, se aprovechan los conocimientos previos del estudiante para resolver nuevos problemas. En cada capítulo, las ideas principales se exponen en las primeras secciones y, a continuación, se presentan el desarrollo y aplicaciones; esta organización permite gran flexibilidad cuando el libro se usa como texto.

William E. Boyce y
Richard C. DiPrima

Introducción a las ECUACIONES DIFERENCIALES

$y = ce^{-}$